



**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
И БЛИОТЕЧКА**

М.М. ПОСТНИКОВ

МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕЧКА

М. М. ПОСТНИКОВ

МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1964

СОДЕРЖАНИЕ

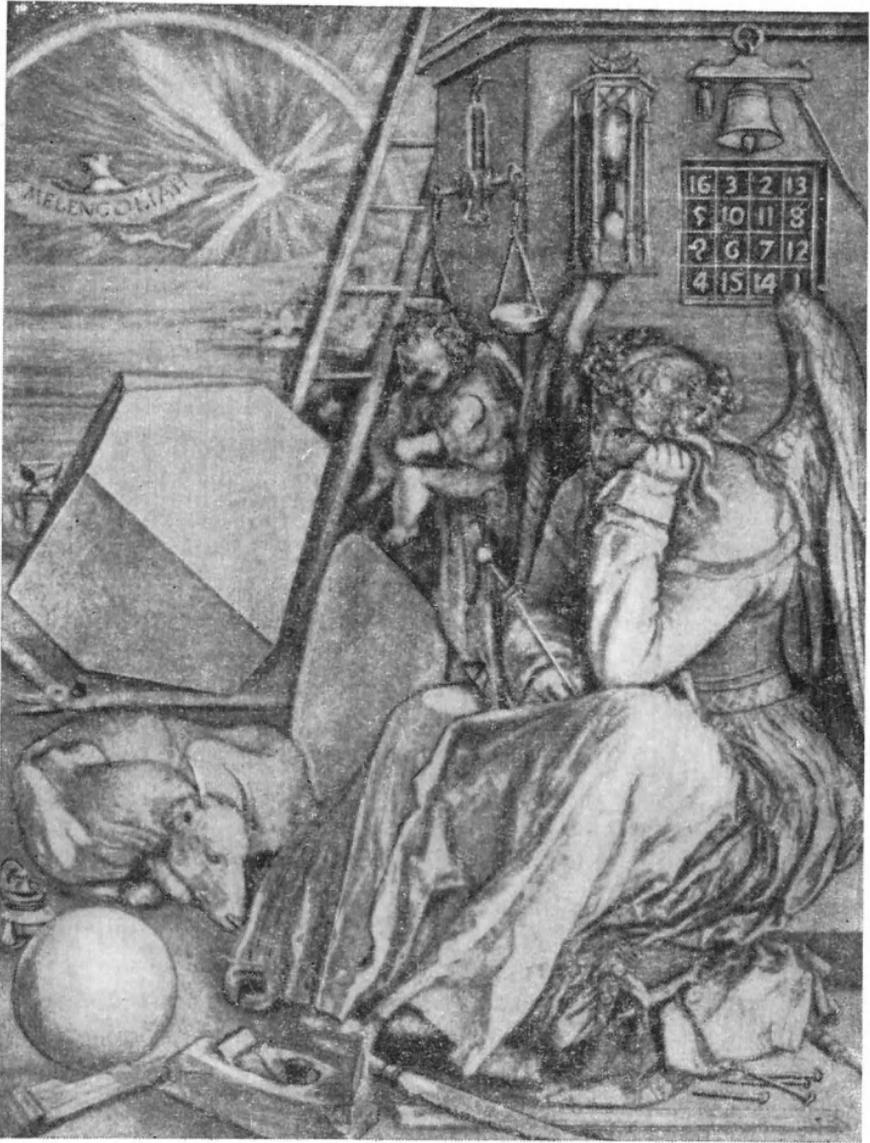
От издательства	5
Предисловие	7
В в е д е н и е. О с р а в н е н и я х	9
1. Сравнения и действия над ними	9
2. Вычеты, полные системы вычетов	11
3. Вычеты значений линейной функции	13
4. Сравнения и неопределенные уравнения первой степени	15
Г л а в а 1. Общий линейный метод построения магических квадратов нечетного порядка	18
1. Магические квадраты и методы их построения	18
2. Общий вид линейного метода построения магических квадратов	22
3. Условия правильности линейного метода	23
Г л а в а 2. Классические алгорифмические методы построения магических квадратов нечетного порядка	28
1. Индийский метод	28
2. Обобщенный индийский метод	32
3. Метод Москопула	33
4. Метод альфила	36
5. Метод Баше	37
6. Классические алгорифмические методы с общей точки зрения	40
Г л а в а 3. Квазилинейный метод Делаира	42
1. Общие соображения о методах, использующих вспомогательные квадраты	42
2. Построение вспомогательных магических квадратов по Делаиру	44
3. Составление магического квадрата по двум вспомогательным	52

Глава 4. Магические квадраты четного порядка	55
1. Метод Раус-Болла построения магических квадратов четного порядка	55
2. Построение перестановок T в случае четного m . . .	59
3. Примеры	62
4. Построение перестановок T в случае нечетного m . . .	64
5. Примеры	68
Добавление. Индуктивный метод построения магических квадратов произвольного порядка	71
1. Описание метода	71
2. Построение окаймлений	76

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Предлагаемая вниманию читателей книга «Магические квадраты» посвящена сравнительно специальному вопросу, стоящему довольно далеко от магистральной линии развития математической науки. Учение о магических квадратах занимало в математике значительное место лишь в тот период, когда в качестве основных «приложений» математики фигурировали числовые суеверия и астрология; в дальнейшем при возникновении новых, более серьезных «потребителей» математики выяснилось, что для решения соответствующих естественнонаучных и технических задач теория магических квадратов не нужна. С тех пор она стала рассматриваться лишь в качестве одного из математических курьезов. Однако при всем том учение о магических квадратах до сих пор может представлять интерес для любителей математики, в первую очередь для учащихся, в силу изящности построений и простоты и наглядности задач, не говоря уже о том, что это учение представляет собой благодарное поле приложения ряда общих теоретико-числовых концепций, весьма существенных и вне их связи с задачами теории магических квадратов.

Лежащая перед читателем книга представляет собой достаточно серьезное изложение общих методов построения магических квадратов. Несмотря на эту несколько «легкомысленную» тему, все изложение построено весьма тщательно и «математично». Издательство надеется, что эта книга принесет определенную пользу не только в том отношении, что в ней даются достаточно полные ответы на обычно возникающие в связи с магическими квадратами вопросы, но и в смысле воспитания у читателя навыков математического мышления.



ПРЕДИСЛОВИЕ

Среди различных «занимательных» вопросов теории чисел одними из интереснейших являются вопросы, связанные с магическими (волшебными) квадратами. Однако, несмотря на то, что на русском языке издано уже довольно много разнообразных книг по «занимательной математике» и почти в каждой из них имеются главы, посвященные магическим квадратам, достаточно полного изложения теории магических квадратов с более или менее общих позиций до сих пор не имеется (если не считать одной главы в книге Я. В. Успенского «Избранные математические развлечения», изд. «Сеятель», 1924 г., давно ставшей библиографической редкостью).

Строго говоря, нет никаких оснований называть теорией известную к настоящему времени сумму сведений о магических квадратах. Как правило, утверждения этой «теории» относятся к квадратам весьма специального вида или даже представляют собой изолированные замечания о тех или иных индивидуальных особо «курьезных» квадратах. Тем не менее некоторые вопросы, связанные с магическими квадратами, можно все же объединить в более или менее целостное учение и рассматривать их с единой точки зрения. В первую очередь это относится к методам построения магических квадратов с нечетным числом клеток и, с некоторой натяжкой, к методам построения магических квадратов с четным числом клеток.

Предлагаемая вниманию читателя книга, при написании которой существенно использована упомянутая выше книга Я. В. Успенского, и имеет целью изложить с единой точки зрения все наиболее известные методы построения магических квадратов с нечетным числом клеток и те методы построения магических квадратов с четным числом клеток, которые допускают достаточно общую трактовку.

При этом мы ограничиваемся лишь «классическими» магическими квадратами, т. е. квадратами, состоящими из последовательных натуральных чисел от 1 до n^2 . Встречающиеся в литературе изолированные утверждения о тех или иных магических квадратах, не укладывающиеся ни в какую общую теорию, в книге не рассматриваются.

Чтение этой книги формально не требует никаких знаний, выходящих за пределы элементарного курса алгебры и арифметики, хотя и предполагает известный опыт в чтении математической литературы. Основному тексту книги предпослано введение, в котором излагаются необходимые для понимания первых трех глав сведения из теории сравнений. Читатель, знакомый с элементами теории чисел, может это введение пропустить.

Рукопись книги была прочитана И. М. Ягломом, которому автор приносит свою благодарность за ценные советы и указания.

Автор

ВВЕДЕНИЕ О СРАВНЕНИЯХ

1. Сравнения и действия над ними

Пусть n — произвольное положительное целое число. Целые (не обязательно положительные) числа a и b называются *сравнимыми по модулю n* , если они отличаются друг от друга на число, кратное числу n , т. е. если существует такое целое число t , что

$$a = b + nt. \quad (1)$$

В этом случае пишут

$$a \equiv b \pmod{n}. \quad (2)$$

Согласно этому определению число a тогда и только тогда делится на n , когда

$$a \equiv 0 \pmod{n}.$$

Свойства сравнений (2) во многом аналогичны свойствам равенств. Например, аналогично отношению равенства отношение сравнимости рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е.

$$a \equiv a \pmod{n};$$

если $a \equiv b \pmod{n}$, то $b \equiv a \pmod{n}$;

если $a \equiv b \pmod{n}$ и $b \equiv c \pmod{n}$, то $a \equiv c \pmod{n}$.

Первые два свойства очевидны. Для доказательства третьего достаточно заметить, что из равенств $a = b + nt$, $b = c + ns$ вытекает равенство $a = c + n(t + s)$.

Далее, аналогично равенствам сравнения можно почленно складывать, вычитать и перемножать. Другими словами, если

имеют место сравнения

$$a \equiv b \pmod{n}, \quad c \equiv d \pmod{n},$$

то имеют место и сравнения

$$\begin{aligned} a \pm c &\equiv b \pm d \pmod{n}, \\ ac &\equiv bd \pmod{n}. \end{aligned}$$

Действительно, если

$$a = b + nt, \quad c = d + ns,$$

то

$$\begin{aligned} a \pm c &= b \pm d + n(t \pm s), \\ ac &= bd + n(td + bs + nts). \end{aligned}$$

В частности, если $a \equiv b \pmod{n}$, то для любого k

$$\begin{aligned} a \pm k &= b \pm k \pmod{n}, \\ ak &= bk \pmod{n}. \end{aligned}$$

Аналогия между сравнениями и равенствами нарушается только для деления. В то время как из равенства $ka = kb$, где $k \neq 0$, всегда вытекает равенство $a = b$, из аналогичного сравнения

$$ka \equiv kb \pmod{n} \tag{3}$$

сравнение

$$a \equiv b \pmod{n}, \tag{4}$$

вообще говоря, не вытекает. Однако

если число k взаимно просто с модулем n , то из сравнения (3) вытекает сравнение (4).

Другими словами,

сравнения можно сокращать на числа, взаимно простые с модулем.

Для доказательства достаточно заметить, что сравнение (3) равносильно делимости на n разности $ka - kb = k(a - b)$, и учесть, что при k взаимно простом с n число $k(a - b)$ тогда и только тогда делится на n , когда на n делится число $a - b$, т. е. когда имеет место сравнение (4).

Пусть теперь числа n и k не взаимно просты, и пусть (n, k) — их наибольший общий делитель. (Символ (n, k) для наибольшего общего делителя общепринят в научной литературе, и мы будем им впредь пользоваться без каких-либо оговорок.) Оказывается, что из сравнения (3) вытекает сравнение

$$a \equiv b \pmod{m},$$

где $m = n/(n, k)$. Действительно, если число $k(a - b)$ делится на n , то число $a - b$ делится на m .

При $k = (n, k)$ мы получаем отсюда, что
из сравнения

$$ka \equiv kb \pmod{km} \quad (5)$$

вытекает сравнение

$$a \equiv b \pmod{m}. \quad (6)$$

Ясно, что и, обратно, из сравнения (6) вытекает сравнение (5).

2. Вычеты, полные системы вычетов

Из двух сравнимых по модулю n чисел каждое по отношению к другому называется его *вычетом*. Таким образом, каждое число имеет бесконечно много вычетов, отличающихся друг от друга на числа, кратные модулю. Среди всех вычетов данного числа a особое значение имеет вычет r , для которого

$$0 \leq r < n.$$

Этот вычет называется *наименьшим неотрицательным вычетом числа a по модулю n* . Он совпадает с остатком от деления числа a на модуль и потому всегда существует и определяется (по данному числу a) единственным образом.

Легко видеть, что два числа тогда и только тогда сравнимы по модулю n , когда их наименьшие неотрицательные вычеты совпадают (в одну сторону это следует из транзитивности отношения сравнимости, а в другую — из того, что наименьшие неотрицательные вычеты совпадают с остатками от деления на n). Другими словами, два числа тогда и только тогда сравнимы по модулю n , когда при делении на n они приводят к одинаковым остаткам. Ввиду этого сравнимые между собой числа иногда называются также *равноостаточными*.

Система целых чисел называется *полной системой вычетов по модулю n* , если выполнены следующие два условия:

1°. Любое целое число сравнимо по модулю n с одним из чисел этой системы.

2°. Различные числа этой системы не сравнимы друг с другом по модулю n .

Условие 2° обеспечивает то, что с каждым целым числом сравнимо только одно число рассматриваемой системы.

Примером полной системы вычетов по модулю n может служить система

$$0, 1, \dots, n-1.$$

Эта система называется *полной системой наименьших неотрицательных вычетов*.

Очевидно, что любые две полные системы вычетов состоят из одного и того же числа элементов (ибо каждое число одной системы сравнимо с одним и только одним числом второй). Поскольку система наименьших неотрицательных вычетов состоит из n чисел, отсюда вытекает, что

любая полная система вычетов по модулю n состоит из n чисел.

Оказывается, что это свойство вместе со свойством 2° полностью характеризует полные системы вычетов, т. е.

любая система n целых чисел

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \tag{1}$$

не содержащая различных сравнимых между собой чисел, является полной системой вычетов по модулю n .

Действительно, наименьшие неотрицательные вычеты чисел системы (1) исчерпывают всю систему наименьших неотрицательных вычетов (их n и все они различны). Поэтому для каждого целого числа a в системе (1) найдется число a_i , имеющее тот же наименьший неотрицательный вычет, что и число a , и потому сравнимое с a . Таким образом, система (1) обладает свойством 1° и потому является полной системой вычетов.

Из доказанного утверждения немедленно вытекает, что *для любого целого числа b , наряду с системой (1), полной системой вычетов является также и система*

$$a_1 + b, a_2 + b, \dots, a_n + b. \tag{2}$$

В самом деле, все числа системы (2) не сравнимы друг с другом по модулю n (если $a_i + b \equiv a_j + b$, то $a_i \equiv a_j$ и потому $a_i = a_j$) и их ровно n .

Аналогично,

если число a взаимно просто с n , то, наряду с системой (1), полной системой вычетов является и система

$$aa_1, aa_2, \dots, aa_n.$$

Действительно, если $aa_i \equiv aa_j \pmod{n}$, то $a_i \equiv a_j \pmod{n}$ и потому $a_i = a_j$, а значит и $aa_i = aa_j$.

Последние два утверждения можно объединить в одно: *если число a взаимно просто с n , то для любого числа b , наряду с системой (1), полной системой вычетов является также и система*

$$aa_1 + b, aa_2 + b, \dots, aa_n + b.$$

3. Вычеты значений линейной функции

Доказанное в конце предыдущего пункта утверждение можно сформулировать также следующим образом:

если коэффициент a линейной функции $ax + b$ взаимно прост с n , то при x , пробегающем некоторую полную систему вычетов по модулю n , соответствующие значения функции $ax + b$ также пробегают полную систему вычетов по модулю n (уже, конечно, другую).

Фиксируя внимание лишь на полной системе наименьших неотрицательных вычетов, это предложение можно сформулировать еще и так:

если коэффициент a линейной функции $ax + b$ взаимно прост с n , то при $x = 0, 1, \dots, n-1$ остатки от деления на n соответствующих значений функции $ax + b$ пробегают (в некотором порядке) полную систему наименьших неотрицательных вычетов.

Рассмотрим теперь общий случай, когда числа a и n не обязательно взаимно просты. Пусть

$$d = (a, n)$$

— наибольший общий делитель чисел a и n . Рассматривая для определенности полную систему

$$0, 1, \dots, n-1 \tag{1}$$

наименьших неотрицательных вычетов, найдем, для каких чисел x_1, x_2 этой системы имеет место сравнение

$$ax_1 + b \equiv ax_2 + b \pmod{n}. \tag{2}$$

Сравнение (2) равносильно сравнению

$$a(x_1 - x_2) \equiv 0 \pmod{n},$$

которое в свою очередь равносильно сравнению

$$x_1 - x_2 \equiv 0 \pmod{\frac{n}{d}}.$$

Отсюда следует, что для того, чтобы по одному разу получить все возможные вычеты значений функции $ax + b$ (при x ,

пробегающем систему (1)), достаточно выбрать в системе (1) полную систему вычетов по модулю $\frac{n}{d}$, например полную систему

$$0, 1, \dots, \frac{n}{d} - 1 \quad (3)$$

наименьших неотрицательных вычетов, и заставить x пробегать эту систему. Кроме того, поскольку в системе (1) имеется точно d чисел, сравнимых с некоторым произвольно взятым числом x системы (3) (эти числа имеют вид $x, x + \frac{n}{d}, x + 2\frac{n}{d}, \dots, x + (d-1)\frac{n}{d}$), отсюда также вытекает, что, когда x пробегает систему (1), каждый вычет значений, принимаемых функцией $ax + b$, повторяется ровно d раз.

Далее, разделим (с остатком) число b на d :

$$b = qd + \varrho, \quad 0 \leq \varrho < d.$$

Так как числа $\frac{a}{d}$ и $\frac{n}{d}$ взаимно просты, то вместе с x полную систему вычетов по модулю $\frac{n}{d}$ пробегает и выражение $\frac{a}{d}x + q$. Поскольку

$$ax + b = d \left(\frac{a}{d}x + q \right) + \varrho,$$

отсюда вытекает, что вычеты значений функций $ax + b$ и $dx + \varrho$ при x , пробегающем систему (3), с точностью до порядка совпадают.

Сопоставляя все доказанные утверждения, мы окончательно получаем, что

при x , пробегающем некоторую полную систему вычетов по модулю n , скажем систему (1), каждый вычет значений функции $ax + b$ повторяется точно d раз; чтобы получить эти вычеты по одному разу, надо в функции $dx + \varrho$ заставить переменную x пробежать некоторую полную систему вычетов по модулю $\frac{n}{d}$, скажем систему (3).

Систему (3) брать особенно удобно, так как соответствующие значения

$$\varrho, d + \varrho, 2d + \varrho, \dots, n - d + \varrho \quad (4)$$

функции $dx + \varrho$ уже сами являются наименьшими неотрицательными вычетами по модулю n . Таким образом,

числа (4) исчерпывают все наименьшие неотрицательные вычеты значений линейной функции $ax + b$; когда x пробегает полную систему вычетов, каждый из вычетов системы (4) повторяется ровно d раз.

Сумма всех чисел (4) равна, как легко видеть, $\frac{n}{d} \left(q + \frac{n-d}{2} \right)$.

Следовательно,

сумма всех наименьших неотрицательных вычетов значений линейной функции $ax + b$ при x , пробегающем некоторую полную систему вычетов по модулю n , равна

$$n \left(q + \frac{n-d}{2} \right), \quad (5)$$

где $d = (a, n)$, а q представляет собой остаток от деления на d свободного члена b .

4. Сравнения и неопределенные уравнения первой степени

Общее сравнение первой степени по модулю n относительно неизвестного x имеет вид

$$ax + b \equiv 0 \pmod{n}. \quad (1)$$

Ясно, что если некоторое число x_0 удовлетворяет этому сравнению (т. е. если $ax_0 + b \equiv 0 \pmod{n}$), то и каждое число x , сравнимое с x_0 , т. е. имеющее вид

$$x = x_0 + nt,$$

где t — произвольное целое число, также удовлетворяет сравнению (1). Поэтому, чтобы описать все решения сравнения (1), достаточно найти все его решения, содержащиеся в некоторой полной системе вычетов, например в полной системе $0, 1, \dots, n-1$ наименьших неотрицательных вычетов.

Пусть сначала $(a, n) = 1$. Тогда при x , пробегающем полную систему вычетов, значения функции $ax + b$ также будут пробегать полную систему вычетов, так что вычет 0 получится один и только один раз. Тем самым доказано, что

если a взаимно просто с n , то сравнение

$$ax + b \equiv 0 \pmod{n}$$

имеет в любой полной системе вычетов одно и только одно решение. Если x_0 — это решение, то любое другое решение сравнения имеет вид

$$x = x_0 + nt,$$

где t — произвольное целое число.

В случае, когда $d = (a, n)$ больше единицы, сравнение (1) либо вообще не имеет решений (если b не делится на d), либо имеет их ровно d (попарно не сравнимых между собой).

В дальнейшем нам придется решать также системы сравнений первой степени. Для простоты мы рассмотрим случай двух сравнений с двумя неизвестными:

$$a_1x + b_1y \equiv c_1 \pmod{n}, \quad a_2x + b_2y \equiv c_2 \pmod{n}, \quad (2)$$

хотя окончательные результаты будут иметь место и для систем сравнений от любого числа неизвестных. Обращаясь со сравнениями как с уравнениями, мы, не пользуясь делением, можем известными из алгебры приемами преобразовать систему (2) к следующему виду:

$$\Delta x \equiv c_1 b_2 - c_2 b_1 \pmod{n}, \quad \Delta y \equiv c_2 a_1 - c_1 a_2 \pmod{n}, \quad (3)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

— определитель системы (2). (Например, чтобы получить первое сравнение системы (3), следует первое сравнение системы (2) умножить на b_2 , второе сравнение — на b_1 и из первого сравнения вычесть второе.)

Если $(\Delta, n) = 1$, то сравнения (3) однозначно определяют вычеты неизвестных x и y , удовлетворяющие системе (2). Таким образом,

если определитель Δ системы сравнений первой степени взаимно прост с n , то эта система имеет одно и только одно решение (в каждой полной системе вычетов).

Случай $(\Delta, n) > 1$ мы здесь рассматривать не будем.

С задачей решения сравнений первой степени тесно связана задача решения в целых числах неопределенных уравнений вида

$$ax + by = c. \quad (4)$$

Действительно, переписав уравнение (4) в виде

$$ax = c \pm |b|y,$$

мы видим, что оно приводит к сравнению

$$ax \equiv c \pmod{|b|}. \quad (5)$$

Следовательно, если коэффициенты a и b взаимно просты, то общее выражение для x имеет вид

$$x = x_0 + bt, \quad (6)$$

где t — произвольное целое число, а x_0 — некоторое решение сравнения (5).

По определению, для числа x_0 существует такое число y_0 , что $ax_0 = c - by_0$, т. е.

$$ax_0 + by_0 = c. \quad (7)$$

Таким образом, пара чисел (x_0, y_0) составляет решение неопределенного уравнения (4).

Число y_0 удовлетворяет сравнению

$$by \equiv c \pmod{|a|},$$

общее решение которого имеет вид

$$y = y_0 + at_1. \quad (8)$$

Подставляя выражения (6) и (8) в уравнение (4) и учитывая равенство (7), мы получим, что

$$ax + by = c + ab(t + t_1).$$

Следовательно, числа (6) и (8) тогда и только тогда составляют решение уравнения (4), когда $t_1 = -t$. Тем самым доказано следующее утверждение:

если коэффициенты a и b уравнения

$$ax + by = c$$

взаимно просты, то это уравнение обладает целочисленным решением (x_0, y_0) ; любое другое его решение (x, y) имеет вид

$$x = x_0 + bt, \quad y = y_0 - at,$$

где t — произвольное целое число.

Если $(a, b) > 1$, то уравнение (4) либо не имеет решений (если c не делится на (a, b)), либо после сокращения на (a, b) сводится к уравнению с взаимно простыми коэффициентами.

Доказанное утверждение теоретически полностью отвечает на вопрос о решении в целых числах уравнения (4). Для практического применения следовало бы еще указать прием фактического нахождения хотя бы одного решения (x_0, y_0) . Однако в дальнейшем нам это не понадобится, и поэтому мы на этом вопросе останавливаться не будем. (Заметим, впрочем, что из всего сказанного выше такой прием, хотя и не очень практичный, можно извлечь без особого труда.)

ГЛАВА I

ОБЩИЙ ЛИНЕЙНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МАГИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

1. Магические квадраты и методы их построения

Числовым квадратом порядка n , где n — некоторое положительное целое число, мы будем называть квадрат, разбитый на n^2 клеток, в которых размещены (в некотором порядке) целые числа от 1 до n^2 . Числовой квадрат мы будем называть *магическим*, если суммы, получаемые от сложения чисел каждого горизонтального ряда, каждого вертикального ряда и обеих диагоналей, одинаковы. Так как квадрат порядка n содержит n , скажем, горизонтальных рядов и сумма Σ чисел каждого ряда одинакова, то сумма всех чисел, размещенных в магическом квадрате, равна $n \Sigma$. С другой стороны, она равна

$$1 + 2 + \dots + n^2 = \frac{n^2(n^2 + 1)}{2}.$$

Следовательно,

$$\Sigma = \frac{n(n^2 + 1)}{2}. \quad (1)$$

Условия равенства суммы элементов отдельных строк, столбцов или диагоналей числу Σ мы будем называть *условиями магичности* этих строк, столбцов или диагоналей.

Пример магического квадрата порядка 4 приведен на рис. 1. (Это так называемый квадрат Дюрера, изображенный на его гравюре «Меланхолия», см. рис. на стр. 6.) Для него, в согласии с формулой (1), $\Sigma = 34$.

Несмотря на то, что в свое время (особенно в XVI—XVIII веках) магические квадраты были предметом пристального изу-

чения ряда известных математиков, их теория ни в коей мере не может считаться завершенной. Достаточно сказать, что до сих пор неизвестен никакой общий метод построения всех магических квадратов данного порядка n и даже неизвестно их число (при $n \geq 5$). Можно лишь утверждать, что это число делится на 8, так как из любого магического квадрата поворотами на 90° вокруг центра и отражениями в сторонах получаются еще 7 новых магических квадратов.

З а м е ч а н и е. Новые магические квадраты из данного можно также получать и некоторыми другими преобразованиями (например, перестановками его рядов). Мы этот вопрос рассматривать здесь не будем.

Клетки магического квадрата порядка n мы будем обозначать парами целых чисел (x, y) — их *координатами*, где x — номер вертикального ряда, а y — номер горизонтального ряда, на пересечении которых находится данная клетка (рис. 2). При этом вертикальные ряды мы нумеруем слева направо, а горизонтальные — снизу вверх. В качестве номеров мы будем использовать числа

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Рис. 1.

$$0, 1, \dots, n-1, \quad (2)$$

т. е. наименьшие неотрицательные вычеты по модулю n .

Разбиение на клетки исходного квадрата — назовем его *основным* — мы продолжим до разбиения на клетки всей плоскости (на рис. 2 основной квадрат очерчен жирной линией). Для клеток плоскости мы также введем координаты (x, y) , определив их аналогично координатам клеток основного квадрата, с тем лишь отличием, что теперь эти координаты могут уже принимать любые целочисленные значения. Среди всех клеток плоскости клетки основного квадрата характеризуются тем свойством, что обе их координаты x и y принадлежат системе (2).

Сдвигая основной квадрат параллельно самому себе на векторы с целочисленными координатами, делящимися на n , мы получим систему не налегающих друг на друга квадратов порядка n , покрывающих всю плоскость. Две клетки, принадлежащие двум таким квадратам и занимающие относительно их одинаковое положение, мы будем называть *эквивалентными*. Другими словами, *две клетки эквивалентны*,

если их соответственные координаты сравнимы по модулю n . Клетки, составляющие основной квадрат, попарно друг другу не эквивалентны, но каждая другая клетка плоскости эквивалентна одной (и только одной) из них. В дальнейшем эквивалентные клетки будут играть совершенно одинаковую роль

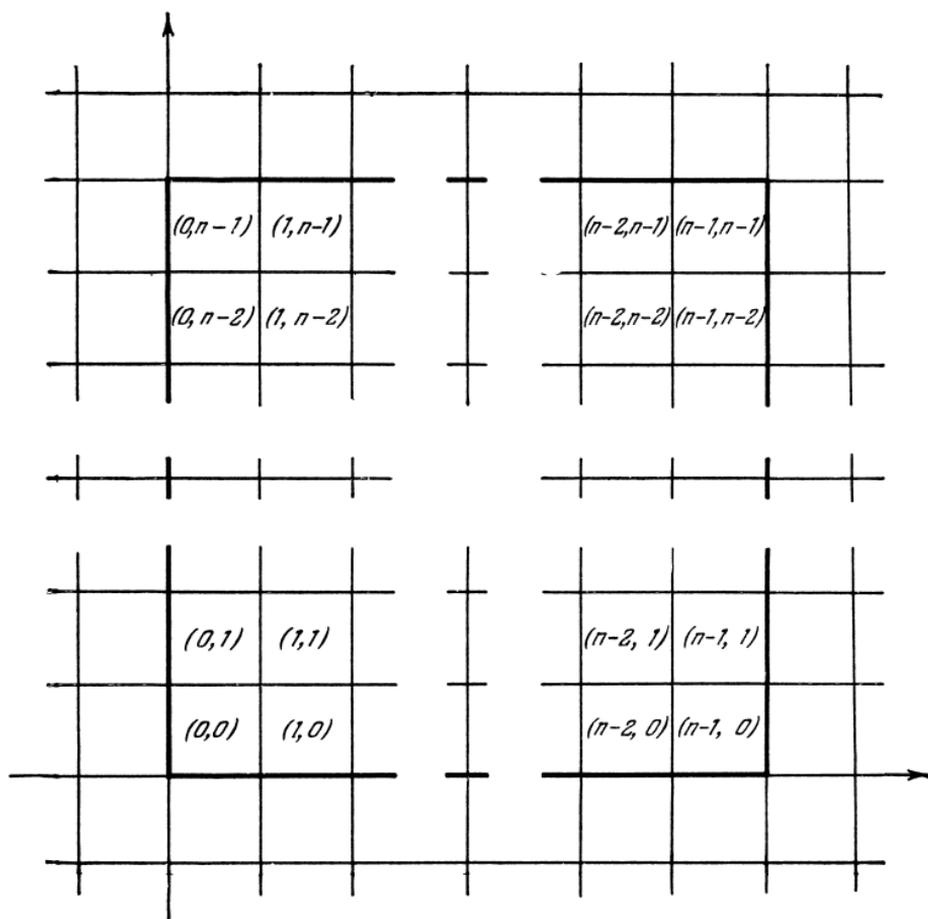


Рис. 2.

и будут рассматриваться как одинаковые. В соответствии с этим нас в основном будут интересовать не сами координаты клеток, а их вычеты по модулю n , ввиду чего мы будем для них писать не равенства, а сравнения.

Каждое целое число $z = 1, 2, \dots, n^2$ мы можем записать в виде

$$z = nr + (s + 1),$$

где r и s — некоторые числа системы (2), однозначно опре-

деленные числом z и, обратно, однозначно определяющие это число. Мы будем числа r, s называть *координатами* числа z .

Например, при $n=3$ координаты чисел

$$z = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

имеют соответственно вид

$$r, s = (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2).$$

При задании некоторого магического квадрата порядка n каждой паре чисел r, s сопоставляется пара чисел x, y — координаты клетки квадрата, в которую вписано число с координатами r, s . Другими словами, числа x и y являются функциями чисел r и s . Обозначая эти функции буквами f и g , мы получим, следовательно, что $x = f(r, s)$ и $y = g(r, s)$. Как уже говорилось, нам удобнее вместо равенств писать сравнения по модулю n . Таким образом,

каждый магический квадрат порядка n описывается двумя сравнениями вида

$$\begin{aligned} x &\equiv f(r, s) \pmod{n}, \\ y &\equiv g(r, s) \pmod{n}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $f(r, s), g(r, s)$ — некоторые функции чисел r и s .

В дальнейшем любую пару произвольно заданных целочисленных функций $f(r, s)$ и $g(r, s)$ мы будем называть *методом построения магических квадратов*. Метод мы условимся называть *правильным*, если формулы (3) действительно определяют магический квадрат.

Описанное сведение задачи построения магического квадрата к задаче построения пары функций $f(r, s)$ и $g(r, s)$ позволяет, в частности, классифицировать способы построения магических квадратов в зависимости от характера этих функций. Простейшим методом построения магических квадратов следует считать метод, для которого функции $f(r, s)$ и $g(r, s)$ линейны, т. е. имеют вид

$$\begin{aligned} f(r, s) &= a_1 r + b_1 s + c_1, \\ g(r, s) &= a_2 r + b_2 s + c_2, \end{aligned}$$

где $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ — некоторые целые числа. Такого рода методы мы будем называть *линейными*.

Основная (до сих пор не решенная) задача теории магических квадратов состоит в выяснении *необходимых и*

достаточных условий, которым должны удовлетворять правильные методы построения магических квадратов. Мы рассмотрим эту задачу лишь для линейных методов. В частности, мы покажем, что

правильные линейные методы существуют лишь для нечетных n .

2. Общий вид линейного метода построения магических квадратов

По определению, каждый линейный метод построения магических квадратов порядка n имеет вид

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 r + b_1 s + c_1 \pmod{n}, \\ y &\equiv a_2 r + b_2 s + c_2 \pmod{n}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для практического применения этого метода весьма существенно, что из формул (1) можно исключить координаты r и s . Действительно, очевидно, что если

$$z = nr + s + 1, \quad r, s = 0, 1, \dots, n-1,$$

то

$$r = \left[\frac{z-1}{n} \right],$$

где $[]$ — знак целой части (наибольшего целого числа, содержащегося в данном), и

$$s \equiv z - 1 \pmod{n}.$$

Поэтому формулы (1) можно переписать в следующем виде, не содержащем явно координат r и s :

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \left[\frac{z-1}{n} \right] + b_1 (z-1) + c_1 \pmod{n}, \\ y &\equiv a_2 \left[\frac{z-1}{n} \right] + b_2 (z-1) + c_2 \pmod{n}. \end{aligned}$$

При фактическом построении магического квадрата можно также писать не эти сравнения, а соответствующие равенства

$$\begin{aligned} x &= a_1 \left[\frac{z-1}{n} \right] + b_1 (z-1) + c_1, \\ y &= a_2 \left[\frac{z-1}{n} \right] + b_2 (z-1) + c_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя в эти равенства числа $z = 1, 2, \dots, n^2$, мы получим координаты ряда клеток, часть из которых будет

обязательно лежать вне основного квадрата. В каждую клетку надо затем вписать соответствующее число z , заменяя одновременно клетки, лежащие вне основного квадрата, эквивалентными клетками этого квадрата (и сохраняя в последних те же числа). В результате мы получим некоторое заполнение клеток основного квадрата числами от 1 до n^2 , которое и будет магическим квадратом, если только метод (1) правилен.

3. Условия правильности линейного метода

Чтобы линейный метод, выраженный формулами (1) п. 2, был правильным, необходимо в первую очередь, чтобы эти формулы устанавливали взаимно однозначное соответствие между координатами (r, s) чисел от 1 до n^2 и координатами (x, y) клеток основного квадрата, т. е. чтобы для любых координат x и y из этих формул можно было однозначно найти соответствующие координаты r и s . Но, решая по известным правилам сравнения (1) п. 2 относительно r и s , мы получим сравнения

$$\begin{aligned}\Delta r &\equiv b_2 x - b_1 y + b_1 c_2 - b_2 c_1 \pmod{n}, \\ \Delta s &\equiv -a_2 x + a_1 y - a_1 c_2 + a_2 c_1 \pmod{n},\end{aligned}\tag{1}$$

где

$$\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Пусть выполнено следующее условие:

М. 1. *Определитель Δ взаимно прост с n .*

Тогда для любых x и y сравнения (1) однозначно определяют координаты r и s (следует иметь в виду, что, по определению, эти координаты принадлежат полной системе (2) п. 1 наименьших неотрицательных вычетов по модулю n). Таким образом,

при выполнении условия М.1 формулы (1) п. 2 устанавливают взаимно однозначное соответствие между числами от 1 до n^2 и клетками основного квадрата.

Рассмотрим теперь следующее условие:

М.2. *Коэффициенты a_1, a_2, b_1, b_2 взаимно просты с n .*

Оказывается, что

при выполнении условия М.2 требование магичности выполняется по отношению ко всем вертикальным и горизонтальным рядам, т. е. сумма чисел каждого вертикального и каждого горизонтального ряда равна

$$\Sigma = \frac{n(n^2 + 1)}{2}.$$

Действительно, для всех клеток некоторого, скажем, горизонтального, ряда координата y одна и та же, а координата x пробегает полную систему вычетов по модулю n . Так как числа b_2 и $-a_2$ по условию взаимно просты с n , то левые части сравнений (1), каждая в отдельности, также пробегает полную систему вычетов. Поэтому полную систему вычетов будут пробегать как координата r , так и координата s (ибо по условию М.1 определитель Δ взаимно прост с n). Таким образом, для чисел рассматриваемого ряда координаты r и s принимают по одному разу каждое из значений $0, 1, \dots, n-1$. Следовательно, суммы R и S этих координат равны каждой числу $1 + 2 + \dots + n-1 = \frac{n(n-1)}{2}$. С другой стороны, сумма всех чисел данного ряда равна, очевидно, числу $nR + S + n$. Поэтому для завершения доказательства остается лишь заметить, что

$$n \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

Для вертикальных рядов рассуждение аналогично (меняется координата y , а координата x остается постоянной).

Таким образом, остается найти лишь условия магичности обеих диагоналей («восходящей», соединяющей левый нижний угол с правым верхним, и «нисходящей», соединяющей левый верхний угол с правым нижним).

Для клеток восходящей диагонали имеет место равенство $x = y$, и потому координаты чисел, находящихся в клетках этой диагонали, определяются из сравнений

$$\Delta r \equiv (b_2 - b_1)x + b_1c_2 - b_2c_1 \pmod{n},$$

$$\Delta s \equiv -(a_2 - a_1)x + a_2c_1 - a_1c_2 \pmod{n}.$$

Так как число Δ взаимно просто с n , то существует такое число Δ' , что

$$\Delta\Delta' \equiv 1 \pmod{n}.$$

Умножая выписанные выше сравнения на это число, мы получим, что

$$\begin{aligned} r &\equiv \Delta' (b_2 - b_1)x + \Delta' (b_1c_2 - b_2c_1) \pmod{n}, \\ s &\equiv -\Delta' (a_2 - a_1)x + \Delta' (a_2c_1 - a_1c_2) \pmod{n}. \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, координаты r и s чисел восходящей диагонали представляют собой вычеты значений, принимаемых левыми частями сравнений (2), когда x пробегает полную

систему вычетов $0, 1, \dots, n-1$. Следовательно (см. введение, п. 3, формула (5)), суммы R и S этих координат выражаются формулами

$$R = n \left(\varrho + \frac{n-d}{2} \right), \quad S = n \left(\varrho_1 + \frac{n-d_1}{2} \right),$$

где

$$\begin{aligned} d &= (\Delta' (b_2 - b_1), n) = (b_2 - b_1, n), \\ d_1 &= (-\Delta' (a_2 - a_1), n) = (a_2 - a_1, n), \end{aligned}$$

а ϱ и ϱ_1 представляют собой наименьшие неотрицательные вычеты чисел $\Delta' (b_1 c_2 - b_2 c_1)$ и $\Delta' (a_2 c_1 - a_1 c_2)$ по модулям d и d_1 соответственно.

Требование магичности заключается в том, что сумма $nR + S + n$ всех чисел восходящей диагонали равна $\frac{n(n^2+1)}{2}$.

Следовательно, должно иметь место равенство

$$n^2 \left(\varrho + \frac{n-d}{2} \right) + n \left(\varrho_1 + \frac{n-d_1}{2} \right) + n = \frac{n(n^2+1)}{2},$$

т. е. равенство

$$2n^2\varrho + 2n\varrho_1 = n^2(d-1) + n(d_1-1).$$

Последнее равенство возможно только при d и d_1 нечетных и, как легко видеть, будет заведомо выполнено, если

$$\varrho = \frac{d-1}{2}, \quad \varrho_1 = \frac{d_1-1}{2},$$

т. е. если будут иметь место сравнения

$$\Delta' (b_1 c_2 - b_2 c_1) \equiv \frac{d-1}{2} \pmod{d},$$

$$\Delta' (a_2 c_1 - a_1 c_2) \equiv \frac{d_1-1}{2} \pmod{d_1}.$$

Умножив эти сравнения на Δ , мы придем к следующему условию:

М.3. Имеют место сравнения

$$b_1 c_2 - b_2 c_1 \equiv \Delta \frac{d-1}{2} \pmod{d},$$

$$a_2 c_1 - a_1 c_2 \equiv \Delta \frac{d_1-1}{2} \pmod{d_1},$$

где $d = (b_2 - b_1, n)$, $d_1 = (a_2 - a_1, n)$.

По доказанному
 при выполнении условия М.3 восходящая диагональ удовлетворяет условию магичности.

Заметим, что при $d=1$ или при $d_1=1$ соответствующее сравнение из условия М.3 удовлетворяется автоматически. Отсюда, в частности, следует, что условие М.3 будет заведомо выполнено, если $d=d_1=1$, т. е. если выполнено следующее условие:

М.3'. Числа b_2-b_1 и a_2-a_1 взаимно просты с n .

Для нисходящей диагонали $x+y=n-1$, и потому ее клетки заполнены числами, координаты которых определяются из сравнений

$$\Delta r \equiv (b_2 + b_1)x + b_1c_2 - b_2c_1 - b_1(n-1) \pmod{n},$$

$$\Delta s \equiv (a_2 + a_1)y - a_1c_2 + a_2c_1 - a_2(n-1) \pmod{n},$$

т. е. из сравнений

$$r \equiv \Delta' (b_2 + b_1)x + \Delta' (b_1c_2 - b_2c_1 + b_1) \pmod{n},$$

$$s \equiv \Delta' (a_2 + a_1)y + \Delta' (a_2c_1 - a_1c_2 + a_2) \pmod{n}.$$

Отсюда, как и выше, мы приходим к условию

М.4. Имеют место сравнения

$$b_1c_2 - b_2c_1 + b_1 \equiv \Delta \frac{d'_1 - 1}{2} \pmod{d'},$$

$$a_2c_1 - a_1c_2 + a_2 \equiv \Delta \frac{d'_1 - 1}{2} \pmod{d'},$$

где

$$d' = (b_2 + b_1, n), \quad d'_1 = (a_2 + a_1, n),$$

и к следующему утверждению:

при выполнении условия М.4 нисходящая диагональ удовлетворяет условию магичности.

Условие М.4 будет заведомо выполнено, если имеет место следующее условие:

М.4'. Числа $b_2 + b_1$ и $a_2 + a_1$ взаимно просты с n .

Резюмируя все сказанное, мы получаем окончательный результат:

при выполнении условий М.1, М.2, М.3 (или М.3') и М.4 (или М.4') линейный метод (1) п. 2 правилен.

Это утверждение дает лишь достаточные условия правильности линейного метода. Читателю рекомендуется самостоятельно рассмотреть вопрос о необходимых условиях.

Заметим в заключение, что условия М.1 и М.2 непротиворечивы только для нечетного n .

Действительно, если n четно, то, согласно условию М. 2, числа a_1, a_2, b_1, b_2 должны быть нечетны, и потому определитель $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$, как разность двух нечетных чисел, должен быть четным, что в силу условия М.1 невозможно.

Таким образом,

правильные линейные методы (или по крайней мере методы, удовлетворяющие условиям М.1—М.4) могут существовать лишь при нечетном n .

Примеры таких методов для любого нечетного n мы укажем в следующей главе.

ГЛАВА 2

КЛАССИЧЕСКИЕ АЛГОРИФМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ МАГИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

1. Индийский метод

Индийский метод составления магических квадратов (иногда называемый также сиа м с к и м) является, по-видимому, самым древним алгоритмом построения магических квадратов произвольного нечетного порядка $n = 2m + 1$. Этот алгоритм описывается следующими правилами:

1°. Числа от 1 до n^2 поочередно вписываются в клетки основного квадрата.

2°. Если некоторое правило требует вписать данное число в клетку, лежащую вне основного квадрата, то вместо этого рассматриваемое число вписывается в эквивалентную клетку основного квадрата.

3°. Число 1 вписывается в среднюю клетку верхнего ряда, т. е. в клетку с координатами

$$(m, 2m).$$

4°. Если число z вписано в клетку с координатами (x, y) , то следующее число $z + 1$ вписывается в клетку с координатами $(x + 1, y + 1)$, т. е. в клетку, смежную с клеткой (x, y) , в направлении восходящей диагонали, при условии, что эта последняя клетка еще свободна от чисел.

5°. Если клетка с координатами $(x + 1, y + 1)$ уже занята некоторым числом, то число $z + 1$ вписывается в клетку с координатами $(x, y - 1)$, т. е. в клетку, непосредственно примыкающую снизу к клетке (x, y) . (Оказывается, что это всегда возможно, т. е. клетка $(x, y - 1)$ обязательно свободна от чисел.)

На рис. 3 изображен магический квадрат третьего порядка, построенный индийским методом. Для ясности на этом рисунке заполнены также некоторые клетки вне основного квадрата. Не описывая подробно это построение, мы укажем лишь, что число 1 вписано на основании правил 1° и 3° , число 2—на основании правил 4° и 2° , число 3—на основании правил 4° и 2° , число 4—на основании правил 5° и 2° , число 5—на основании правила 4° , число 6—на основании правила 4° , число 7—на основании правил 5° и 2° , число 8—на основании правил 4° и 2° и, наконец, число 9—на основании правил 4° и 2° .

	9	2	4
8	1	6	8
3	5	7	3
4	9	2	

Рис. 3.

Замечание. Из полученного по индийскому методу магического квадрата третьего порядка можно поворотами около центра и отражениями в сторонах получить еще семь других магических квадратов. Без труда проверяется, что этими восемью магическими квадратами исчерпываются все магические квадраты третьего порядка. Таким образом, указанная в п. 1 оценка для числа магических квадратов данного порядка n не может быть улучшена (если не налагать на n никаких дополнительных условий).

Сущность индийского метода лучше всего уясняется, если не обращать внимания на правило 2° , т. е. если не заменять внешних клеток эквивалентными. При таком упрощении применение алгоритма сводится к заполнению клетки $(m, 2m)$ числом 1 и следующих за ней вверх по диагонали клеток $(m+1, 2m+1)$, $(m+2, 2m+2)$, ..., $(m+k, 2m+k)$, ... числами 2, 3, ..., $k+1$, ..., до тех пор, пока не встретится клетка, эквивалентная клетке $(m, 2m)$, что, очевидно, произойдет при $k=n$. Под последней из заполненных клеток (это будет клетка $(m+n-1, 2m+n-1) = (3m, 4m)$ с числом n), т. е. в клетке $(3m, 4m-1)$, помещается число $n+1$, и с этой клетки начинается новый диагональный ряд, который, как легко видеть, кончится на числе $2n$, так что число $2n+1$ помещается под клеткой с числом $2n$. Следующий диагональный ряд кончится на числе $3n$, и т. д. Этот процесс остановится, когда мы дойдем до числа n^2 . В результате мы получим n диагональных рядов чисел по n чисел в ряду, составляющих своеобразную «лесенку» (см. рис. 4 для $n=3$ и $n=5$).

Покажем теперь, что клетка построенной «лесенки», содержащая некоторое число z ($z = 1, 2, \dots, n^2$), имеет координаты

$$\begin{aligned} x &= z - \left[\frac{z-1}{n} \right] + m - 1, \\ y &= z - 2 \left[\frac{z-1}{n} \right] + 2m - 1, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$m = \frac{n-1}{2}.$$

Действительно, для чисел $z = 1, 2, \dots, n$ первого диагонального ряда эти формулы дают правильные координаты $(m + z - 1, 2m + z - 1)$ соответствующих клеток (см. выше).

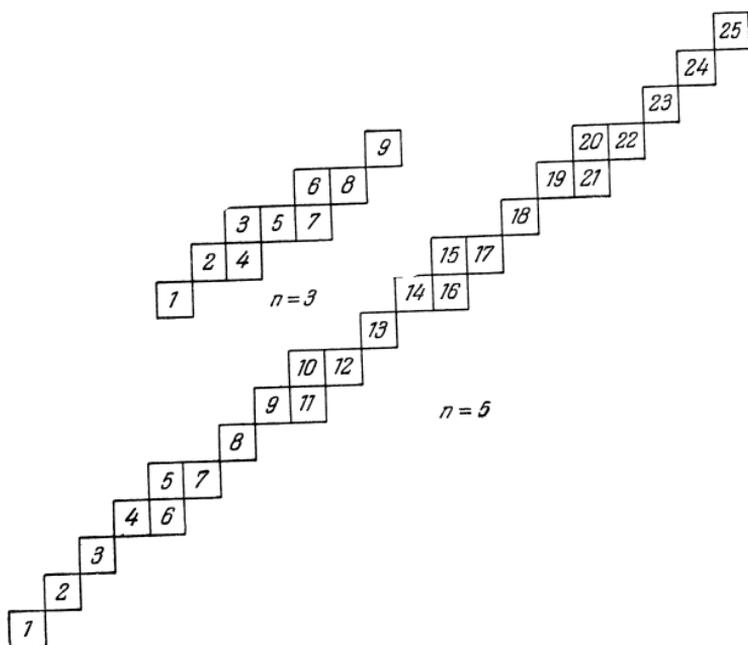


Рис. 4.

Пусть формулы (1) уже доказаны для чисел $z = (p-1)n + 1, (p-1)n + 2, \dots, pn$, составляющих p -й диагональный ряд. Тогда, согласно этим формулам, число pn помещается в клетке $(pn - p + m, pn - 2p + 2m + 1)$ и, следовательно, согласно правилам построения «лесенки», число $pn + 1$ помещается в клетке $(pn - p + m, pn - 2p + 2m)$, число $pn + 2$ — в клетке $(pn - p + m + 1, pn - 2p + 2m + 1)$, вообще число $z = pn + k$, где $1 \leq k \leq n$, — в клетке $(pn - p + m + k - 1, pn - 2p +$

$+ 2m + k - 1$), т. е. в клетке $(z - p + m - 1, z - 2p + 2m - 1)$. Поскольку при $z = pn + k$ имеет место равенство $\left[\frac{z-1}{n}\right] = p$, тем самым доказано, что формулы (1) справедливы и для чисел $z = pn + 1, pn + 2, \dots, (p + 1)n$, составляющих $(p + 1)$ -й ряд. Поэтому, согласно принципу полной математической индукции, формулы (1) справедливы для чисел любого ряда, т. е. для всех чисел от 1 до n^2 .

Сравнивая доказанные формулы (1) с формулами (2) из п. 2 гл. 1, мы немедленно получаем, что

индийский метод является линейным методом с коэффициентами

$$\begin{aligned} a_1 &= -1, & b_1 &= 1, & c_1 &= m, \\ a_2 &= -2, & b_2 &= 1, & c_2 &= 2m. \end{aligned}$$

Определитель Δ индийского метода равен, очевидно, единице, так что этот метод для любого n удовлетворяет условию М. 1. Ясно также, что для любого нечетного n он удовлетворяет и условию М. 2. Далее, так как $b_2 - b_1 = 0$, $a_2 - a_1 = -1$, то $d = n$, $d_1 = 1$, и потому условие М. 3 сводится к сравнению

$$1 \cdot 2m - 1 \cdot m \equiv \frac{n-1}{2} \pmod{n},$$

которое очевидным образом удовлетворяется. Наконец, так как $b_1 + b_2 = 2$, $a_2 + a_1 = -3$, то при $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ имеет место даже условие М. 4', а при $n \equiv 0 \pmod{3}$ условие М. 4 сводится к очевидному сравнению

$$-2 \cdot m - (-1) \cdot 2m + (-2) \equiv \frac{3-1}{2} \pmod{3}$$

и потому также выполнено.

Тем самым доказано, что

для любого нечетного n индийский метод правилен, т. е. его применение приводит к некоторому магическому квадрату.

Индийский метод, не оставляя желать ничего лучшего в отношении простоты и легкости применения, страдает тем недостатком, что для каждого нечетного n он дает лишь один, вполне определенный, магический квадрат. Однако, как мы сейчас покажем, несколько обобщив этот метод, можно получить метод, приводящий, вообще говоря, к n квадратам,

2. Обобщенный индийский метод

Существо индийского метода состоит в правилах 4°, 5°, обеспечивающих построение «лесенки». Что же касается правила 3°, т. е. требования начинать построение обязательно с клетки $(m, 2m)$, то оно, как мы сейчас покажем, отнюдь не обязательно.

Подставляя в формулы (1) п. 2 гл. 1 общего линейного метода координаты $r=0$, $s=0$ числа 1, мы немедленно получим, что

коэффициенты c_1 , c_2 представляют собой координаты клетки, в которую вписано число 1.

Следовательно, варьируя числа c_1 и c_2 , мы будем менять место числа 1 в квадрате. Сохраняя при этом остальные коэффициенты a_1, a_2, b_1, b_2 неизменными, мы оставим метод по существу тем же самым.

Таким образом, желая исследовать вопрос о возможном обобщении правила 3° индийского метода, мы должны рассмотреть метод вида

$$\begin{aligned} x &= z - \left[\frac{z-1}{n} \right] + c_1 - 1, \\ y &= z - 2 \left[\frac{z-1}{n} \right] + c_2 - 1 \end{aligned} \quad (1)$$

и найти все значения коэффициентов c_1 и c_2 , для которых этот метод правилен. Алгоритм для построения магических квадратов по этому методу состоит из тех же правил 1°—5°, что и алгоритм индийского метода, с тем лишь отличием, что правило 3° заменяется следующим:

3°. Число 1 вписывается в клетку с координатами (c_1, c_2) .

Метод (1), очевидно, удовлетворяет условиям М. 1 и М. 2. Что же касается условия М. 3, то, поскольку $d=n$, $d_1=1$, оно сводится к сравнению

$$c_2 - c_1 \equiv m \pmod{n}. \quad (2)$$

Этому сравнению удовлетворяют n клеток основного квадрата, эквивалентных клеткам «восходящего» диагонального ряда, проходящего через среднюю клетку верхнего ряда.

Наконец, если $n \not\equiv 0 \pmod{3}$, то выполнено условие М. 4'. Если же $n \equiv 0 \pmod{3}$, то $d'=1$, $d'_1=3$ и потому условие М. 4 сводится к сравнению

$$-2c_1 + c_2 - 2 \equiv 1 \pmod{3},$$

т. е. к сравнению

$$2c_1 - c_2 \equiv 0 \pmod{3}. \quad (3)$$

С другой стороны, при $n \equiv 0 \pmod{3}$ (а значит, при $m \equiv 1 \pmod{3}$) из сравнения (2) вытекает сравнение

$$c_2 - c_1 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Отсюда и из сравнения (3) следует, что

$$c_1 \equiv 0 \pmod{3}, \quad c_2 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Таким образом, мы получаем следующий окончательный результат:

в алгоритме индийского метода начальную клетку, в которую вписывается число 1, можно при $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ произвольно выбирать среди n клеток, эквивалентных клеткам «восходящего» диагонального ряда, проходящего через среднюю клетку верхнего горизонтального ряда; если же $n \equiv 0 \pmod{3}$, то эта клетка должна дополнительно обладать тем свойством, что ее первая координата делится на 3 (и тогда вторая при делении на 3 обязательно даст остаток 1).

В частности, за начальную клетку индийского метода можно всегда выбирать среднюю клетку левого вертикального ряда, имеющую координаты $(0, m)$. Это видоизменение индийского метода было предложено Лалубером.

С помощью обобщенного индийского метода мы получаем либо n квадратов (при $n \not\equiv 0 \pmod{3}$), либо $n/3$ квадратов (при $n \equiv 0 \pmod{3}$).

3. Метод Москопула

В методе византийского ученого Москопула, как и в индийском методе, указывается некоторый алгоритм последовательного заполнения клеток основного квадрата числами от 1 до n^2 . Порядок заполнения клеток по этому способу такой же, как порядок обегания шахматной доски конем,двигающимся вверх и направо (поэтому метод Москопула иногда называется также методом коня).

Первые два правила алгоритма Москопула в точности совпадают с соответствующими правилами 1° и 2°

индийского метода. Остальные правила формулируются следующим образом:

3°. Если $n \not\equiv 0 \pmod{3}$, то начальная клетка, в которую вписывается число 1, выбирается произвольно; если же $n \equiv 0 \pmod{3}$, то за эту клетку принимается средняя клетка нижнего горизонтального ряда, т. е. клетка с координатами $(m, 0)$.

4°. Если некоторое число z вписано в клетку с координатами (x, y) , то число $z + 1$ вписывается в клетку с координатами $(x + 1, y + 2)$ при условии, что эта клетка еще свободна от чисел.

5°. Если клетка с координатами $(x + 1, y + 2)$ уже занята некоторым числом, то число $z + 1$ вписывается в клетку с координатами $(x, y + 4)$, т. е. в клетку, расположенную в том же вертикальном ряду, что и клетка с числом z , но находящуюся на четыре клетки выше.

Рис. 5 иллюстрирует построение магического квадрата пятого порядка по способу Москопула.

Для изучения метода Москопула мы, как и раньше, отвлекемся от правила 2°, т. е. не будем заменять внешние клетки

эквивалентными им клетками основного квадрата. Тогда, если мы вписали число 1 в клетку (x_0, y_0) , то число 2 мы должны вписать в клетку $(x_0 + 1, y_0 + 2)$, число 3 — в клетку $(x_0 + 2, y_0 + 4)$ и вообще число z — в клетку $(x_0 + z - 1, y_0 + 2(z - 1))$, и так до тех пор, пока не встретим клетку, эквивалентную уже занятой. Очевидно, что это произойдет при $z = n + 1$. Поэтому, вписав число n в клетку $(x_0 + n - 1, y_0 + 2(n - 1))$, мы число $n + 1$ должны вписать не в клетку $(x_0 + n, y_0 + 2n)$, эквивалентную исходной клетке (x_0, y_0) , а — в соответствии с правилом 5° — в клетку $(x_0 + n - 1, y_0 + 2(n + 1))$. Дальнейшие вписывания мы должны опять производить по «ходу коня», пока снова не натолкнемся на клетку, эквивалентную уже занятой, что, как легко видеть, произойдет при $z = 2n + 1$, после чего мы должны совершить «скачок вверх» и т. д. Простой индук-

			21		
	6				
	12	25	8	16	4
	18		14	22	10
11	24	7	20	3	
17	5	13	21	9	17
23	6	19	2	15	23
4	12	25	8	16	
10	18	1	14	22	

Рис. 5.

цией без труда показывается (см. аналогичные рассуждения в п. 1), что при этом построении число $z = 1, 2, \dots, n^2$ попадает в клетку с координатами

$$x = z - \left[\frac{z-1}{n} \right] + x_0 - 1,$$

$$y = 2z + 2 \left[\frac{z-1}{n} \right] + y_0 - 2.$$

Тем самым доказано, что

метод Москопула является линейным методом с коэффициентами

$$a_1 = -1, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = x_0,$$

$$a_2 = 2, \quad b_2 = 2, \quad c_2 = y_0.$$

Для этого метода

$$\Delta = -4, \quad d = 1, \quad d_1 = (3, n), \quad d' = (3, n), \quad d'_1 = 1,$$

откуда следует, что при $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ этот метод правилен. Что же касается случая $n \equiv 0 \pmod{3}$, то для правильности метода должны удовлетворяться сравнения

$$2x_0 + y_0 \equiv -4 \frac{3-1}{2} \pmod{3},$$

$$y_0 - 2x_0 + 1 \equiv -4 \frac{3-1}{2} \pmod{3},$$

из которых следует, что

$$x_0 \equiv 1 \pmod{3}, \quad y_0 \equiv 0 \pmod{3}. \quad (1)$$

Поскольку координаты $x_0 = m$ и $y_0 = 0$ средней клетки нижнего горизонтального ряда удовлетворяют этим сравнениям, то *метод Москопула правилен для любого нечетного n .*

Одновременно мы получаем, что, как и индийский метод, метод Москопула допускает обобщение. Именно, *при $n \equiv 0 \pmod{3}$ начальную клетку (x_0, y_0) можно выбирать произвольно, лишь бы удовлетворялись сравнения (1).*

При помощи этого метода получаются n^2 магических квадратов, если $n \not\equiv 0 \pmod{3}$, и $(n/3)^2$ таких квадратов, если $n \equiv 0 \pmod{3}$.

При $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ метод Москопула можно видоизменить, заменяя в нем правило 5° правилом 5° индийского метода. Читателю предлагается самостоятельно исследовать правильность этого видоизменения (и, в частности, найти все допустимые начальные клетки).

4. Метод альфила

Метод альфила вполне аналогичен методу Москопула, только вместо хода коня в этом методе используется движение по диагонали через одну клетку (по этому закону в старинных шахматах двигался предок современного слона — так называемый альфил, от которого и происходит название метода). Как и для метода Москопула, первые два правила метода альфила совпадают с правилами 1° и 2° индийского метода. Остальные правила формулируются следующим образом:

			6			
		24	8	17		15
	21	10	19	3	12	
23	7	16	5	14	23	7
9	18	2	11	25	9	18
20	4	13	22	6	20	4
1	15	24	8	17		
12	21	10	19	3		

Рис. 6.

3°. Число 1 вписывается в клетку с координатами (0,1).

4°. Если число z вписано в клетку с координатами (x, y) , то число $z + 1$ вписывается в клетку с координатами $(x + 2, y + 2)$ при условии, что эта клетка еще свободна от чисел.

5°. Если клетка $(x + 2, y + 2)$ уже занята, то число $z + 1$ вписывается в клетку с координатами $(x + 1, y + 3)$, т. е. в клетку, получающуюся из клетки с числом z «удлиненным ходом коня».

Пример построения магического квадрата пятого порядка по методу альфила приведен на рис. 6.

Без труда проверяется (см. аналогичные рассуждения для индийского метода и метода Москопула), что аналитически метод альфила записывается формулами

$$x = 2z - \left[\frac{z-1}{n} \right] - 2,$$

$$y = 2z + \left[\frac{z-1}{n} \right] - 1,$$

откуда следует, что

метод альфила является линейным методом с коэффициентами

$$a_1 = -1, \quad b_1 = 2, \quad c_1 = 0,$$

$$a_2 = 1, \quad b_2 = 2, \quad c_2 = 1.$$

Проверка того, что

для любого нечетного n метод альфила правилен, предоставляется читателю.

Для каждого n метод альфила дает только один магический квадрат.

5. Метод Баше

По-видимому, самый простой метод построения магических квадратов нечетного порядка предложен Баше де Мезириаком. Он известен также как метод террас. Некоторые авторы называют его индийским методом. Он был известен еще Москопулу.

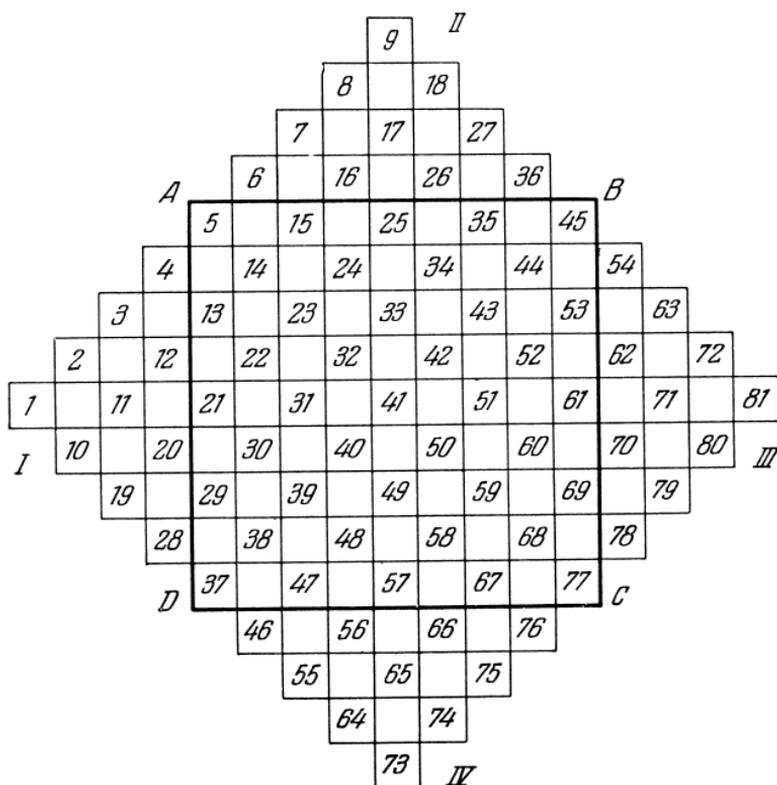


Рис. 7.

Для построения магического квадрата по методу Баше следует выбрать на плоскости n соседних диагональных рядов, содержащих по n клеток и таких, что средняя клетка каждого ряда принадлежит нисходящей диагонали основного квадрата. Клетки левого верхнего ряда заполняются снизу

вверх числами $1, 2, \dots, n$, клетки следующего ряда — числами $n+1, n+2, \dots, 2n$ и вообще клетки p -го ряда, где $1 \leq p \leq n$, — числами $(p-1)n+1, (p-1)n+2, \dots, pn$ (см. для $n=9$ рис. 7). Заполненные таким образом клетки частью расположены внутри основного квадрата, частью — вне его, причем внешние клетки образуют по бокам основного квадрата четыре совершенно одинаковых выступа

5	46	15	56	25	66	35	76	45
54	14	55	24	65	34	75	44	4
13	63	23	64	33	74	43	3	53
62	22	72	32	73	42	2	52	12
21	71	31	81	41	1	51	11	61
70	30	80	40	9	50	10	60	20
29	79	39	8	49	18	59	19	69
78	38	7	48	17	58	27	68	28
37	6	47	16	57	26	67	36	77

Рис. 8.

или террасы. Легко видеть, что каждая пустая клетка основного квадрата эквивалентна одной и только одной клетке некоторой террасы. Следовательно, перенеся клетки террас в основной квадрат, что легко достигается параллельным перенесением этих террас, мы заполним весь основной квадрат числами от 1 до n^2 . Оказывается, что получающийся таким образом числовой квадрат является магическим.

На рис. 7 образовавшиеся при заполнении клеток террасы обозначены римскими цифрами *I, II, III* и *IV*. Для построения магического квадрата террасу *I* следует передвинуть параллельно самой себе так, чтобы линия *AD* совпала с линией *BC*, террасу *II* передвинуть так, чтобы линия *AB* совпала с линией *DC*, террасу *III* — так, чтобы линия *BC* совпала с линией *AD* и, наконец, террасу *IV* — так, чтобы линия *DC* совпала с линией *AB*. Получающийся в результате магический квадрат изображен на рис. 8.

Для доказательства правильности метода Баше мы сдвинем второй сверху диагональный ряд вдоль его направления на n клеток вверх. Ясно, что при этом каждая клетка ряда заменится ей эквивалентной. Далее подобным же образом сдвинем третий ряд на $2n$ клеток вверх и вообще p -й ряд, где $1 \leq p \leq n$, сдвинем на $(p-1)n$ клеток вверх. Без труда проверяется, что получившаяся таким образом система клеток аналитически определяется формулами

$$x = z + \left[\frac{z-1}{n} \right] - m - 1,$$

$$y = z - \left[\frac{z-1}{n} \right] + m - 1.$$

Отсюда вытекает, что

метод Баше является линейным методом с коэффициентами

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = -m,$$

$$a_2 = -1, \quad b_2 = 1, \quad c_2 = m.$$

Для этого метода

$$\Delta = 2, \quad d = n, \quad d_1 = 1, \quad d' = 1, \quad d'_1 = n.$$

Следовательно, проверки требует лишь первое сравнение условия М. 3 и второе сравнение условия М. 4. В данном случае эти сравнения имеют вид

$$m + m \equiv 2m \pmod{n},$$

$$m - m - 1 \equiv 2m \pmod{n}$$

и очевидным образом справедливы.

Тем самым доказано, что

метод Баше правилен для любого нечетного n .

По форме алгоритм метода Баше отличается от ранее рассмотренных алгоритмов (индийского, Москопула и альфила). Однако, как легко видеть, он приводит к тому же магическому квадрату, что и алгоритм, для которого правила 1°, 2° и 4° совпадают с правилами индийского метода, а правила 3° и 5° формулируются следующим образом:

3°. Число 1 вписывается в клетку с координатами $(m+1, m)$.

5°. Если клетка с координатами $(x+1, y+1)$ уже заполнена, то число $z+1$ вписывается в клетку, имеющую координаты $(x+2, y)$, т. е. в клетку, сдвинутую на две клетки вправо.

Таким образом, метод Баше принадлежит к тому же типу алгорифмических методов, что и рассмотренные ранее методы.

Читателю рекомендуется самостоятельно рассмотреть вопрос о возможном изменении начальной клетки в описанном выше алгорифме.

6. Классические алгорифмические методы с общей точки зрения

Все рассмотренные алгорифмические методы имеют друг с другом много общего. Все они описываются пятью правилами, из которых первые два для всех методов одинаковы, третье описывает возможные координаты (x_0, y_0) начальной клетки, в которую вписывается число 1, четвертое указывает координаты (\bar{x}, \bar{y}) клетки, в которую вписывается число $z + 1$, при условии, что число z вписано в клетку (x, y) и что клетка (\bar{x}, \bar{y}) еще свободна от чисел, и, наконец, пятое правило указывает координаты (x^*, y^*) клетки, в которую вписывается число $z + 1$, если клетка (\bar{x}, \bar{y}) уже оказалась занятой. При этом для любых x и y величины

$$p = \bar{x} - x, \quad q = \bar{y} - y, \quad p_1 = x^* - x, \quad q_1 = y^* - y$$

имеют одно и то же постоянное значение.

Такого рода алгорифмы построения магических квадратов мы будем называть *классическими*, а числа p, q, p_1 и q_1 — *параметрами* данного классического алгорифма.

Для индийского метода

$$p = 1, \quad q = 1, \quad p_1 = 0, \quad q_1 = -1;$$

для метода Москопула

$$p = 1, \quad q = 2, \quad p_1 = 0, \quad q_1 = 4;$$

для метода альфила

$$p = 2, \quad q = 2, \quad p_1 = 1, \quad q_1 = 3;$$

для метода Баше

$$p = 1, \quad q = 1, \quad p_1 = 2, \quad q_1 = 0.$$

По индукции легко проверяется (см. аналогичные рассуждения для конкретных методов), что классический метод с параметрами p, q, p_1 и q_1 аналитически выражается формулами

$$x = (p_1 - p) \left[\frac{z-1}{n} \right] + p(z-1) + x_0,$$

$$y = (q_1 - q) \left[\frac{z-1}{n} \right] + q(z-1) + y_0.$$

Таким образом,

любой классический алгоритмический метод построения магических квадратов равносильен линейному методу с коэффициентами

$$\begin{aligned} a_1 &= p_1 - p, & b_1 &= p, & c_1 &= x_0, \\ a_2 &= q_1 - q, & b_2 &= q, & c_2 &= y_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Обратно,

любой линейный метод равносильен классическому алгоритмическому методу с параметрами

$$p = b_1, \quad q = b_2, \quad p_1 = b_1 + a_1, \quad q_1 = b_2 + a_2$$

и начальной клеткой (c_1, c_2) .

Подставляя выражения (1) в условия М.1—М.4 правильности общего линейного метода, мы получим следующие условия:

А.1. Число

$$-\Delta = \begin{vmatrix} p & q \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} = pq_1 - p_1q$$

взаимно просто с n .

А.2. Числа p , q , $p_1 - p$ и $q_1 - q$ взаимно просты с n .

А.3. Имеют место сравнения

$$qx_0 - py_0 \equiv -\Delta \frac{d-1}{2} \pmod{d},$$

$$(q_1 - q)x_0 - (p_1 - p)y_0 \equiv \Delta \frac{d_1 - 1}{2} \pmod{d_1},$$

где $d = (p - q, n)$, $d_1 = (p - q - p_1 + q_1, n)$.

А.4. Имеют место сравнения

$$qx_0 - py_0 \equiv p - \Delta \frac{d' - 1}{2} \pmod{d'},$$

$$(q_1 - q)x_0 - (p_1 - p)y_0 \equiv \Delta \frac{d'_1 - 1}{2} - q_1 + q \pmod{d'_1},$$

где $d' = (p + q, n)$, $d'_1 = (p + q - p_1 - q_1, n)$.

Аналогично, условия М.3' и М.4' переходят в условия:

А.3'. Числа $p - q$ и $p - q - p_1 + q_1$ взаимно просты с n .

А.4'. Числа $p + q$ и $p + q - p_1 + q_1$ взаимно просты с n .

Из всего сказанного немедленно следует, что

для правильности классического алгоритмического метода с параметрами p , q , p_1 , q_1 достаточно выполнения условий А.1, А.2, А.3 (или А.3') и А.4 (или А.4').

ГЛАВА 3

КВАЗИЛИНЕЙНЫЙ МЕТОД ДЕЛАИРА

Линейными методами (или равносильными им алгоритмами) не исчерпываются, конечно, все возможные методы построения магических квадратов нечетного порядка. В этой главе мы детально разберем восходящий к французскому математику Делаиру очень интересный нелинейный метод, позволяющий получить довольно много различных магических квадратов данного нечетного порядка n .

Метод Делаира, по существу, представляет собой несколько усложненный линейный метод. Если в линейном методе для того, чтобы получить координаты числа, вписываемого в клетку (x, y) , требуется рассмотреть две линейные комбинации чисел x и y и взять их вычеты по модулю n , то в методе Делаира к этому присоединяется еще дополнительная операция, состоящая в том, что полученные вычеты преобразуются некоторыми подстановками степени n .

1. Общие соображения о методах, использующих вспомогательные квадраты

Поскольку в магическом квадрате координаты (x, y) клеток и координаты (r, s) вписанных в них чисел находятся во взаимно однозначном соответствии, вместо того чтобы выражать с помощью функций $f(r, s)$ и $g(r, s)$ (см. п. 1 гл. 1) координаты (x, y) через координаты (r, s) , можно с помощью обратных функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ выражать координаты (r, s) через координаты (x, y) :

$$\begin{aligned} r &\equiv \varphi(x, y) \pmod{n}, \\ s &\equiv \psi(x, y) \pmod{n}, \end{aligned} \tag{1}$$

В этом случае заполнение основного квадрата числами удобно производить в три этапа. На первом этапе в каждую клетку основного квадрата вписывается координата r того числа, которое должно быть помещено в эту клетку. На втором этапе в клетки другого экземпляра основного квадрата вписываются координаты s . В результате мы получаем два вспомогательных квадрата (r) и (s). На третьем заключительном этапе каждое число квадрата (r) умножается на n и складывается с увеличенным на единицу соответствующим числом квадрата (s).

2	0	1
0	1	2
1	2	0

1	0	2
2	1	0
0	2	1

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Рис. 9.

Легко видеть, что

это построение приводит к магическому квадрату порядка n , если выполнены следующие условия:

1°. Оба вспомогательных квадрата обладают свойством магичности с суммой $\frac{n(n-1)}{2}$, т. е. в них суммы чисел по вертикальным и горизонтальным рядам, а также по обеим диагоналям имеют одно и то же значение $\frac{n(n-1)}{2}$.

2°. Ни в каких двух различных клетках окончательного квадрата не появляются одинаковые числа.

Для доказательства достаточно заметить, что условие 2° равносильно тому, что в клетках окончательного квадрата по одному разу встречается каждое из чисел $1, 2, \dots, n^2$. Читателю предлагается самостоятельно исследовать вопрос о необходимости условий 1° и 2°.

Квадраты порядка n , устроенные из чисел $0, 1, \dots, n-1$ (причем некоторые из этих чисел могут и не участвовать в построении квадрата), для которых суммы чисел всех рядов и обеих диагоналей равны $\frac{n(n-1)}{2}$, мы будем называть *вспомогательными магическими квадратами*. Доказанное предложение показывает, что построение магического квадрата с числами от 1 до n^2 по существу сводится к

построению двух вспомогательных магических квадратов, один из которых играет роль квадрата (r), а другой — роль квадрата (s).

Рассмотрим в качестве примера квадраты, изображенные на рис. 9. Первые два квадрата представляют собой вспомогательные магические квадраты. Умножив все числа первого квадрата на 3 и сложив их с увеличенными на единицу числами второго квадрата, мы получим изображенный на рисунке третий магический квадрат.

Метод Делайра которому посвящена эта глава, представляет собой, собственно говоря, метод построения вспомогательных магических квадратов.

2. Построение вспомогательных магических квадратов по Делайру

Построение каждого вспомогательного квадрата по Делайру зависит от некоторой перестановки

$$i_0, i_1, \dots, i_{n-1} \quad (1)$$

чисел

$$0, 1, \dots, n-1. \quad (2)$$

С помощью этой перестановки мы можем любому целому числу a отнести некоторое число $\langle a \rangle$ ряда (2), определив его формулой

$$\langle a \rangle = i_r,$$

где r — наименьший неотрицательный вычет числа a по модулю n .

Выбрав теперь некоторые взаимно простые с n целые числа α и β , мы условимся заполнять клетку с координатами (x, y) числом $\langle \alpha x + \beta y \rangle$. Выясним, при каких условиях это заполнение приводит к вспомогательному магическому квадрату.

Во-первых, легко видеть, что горизонтальные и вертикальные ряды удовлетворяют условию магичности без каких-либо дополнительных ограничений. Действительно, например, числа y -го горизонтального ряда имеют вид $\langle \alpha x + \beta y \rangle$, где y фиксировано, а x пробегает полную систему вычетов по модулю n . Так как α по условию взаимно просто с n , то вычеты чисел $\alpha x + \beta y$ также пробегают при этом полную систему вычетов по модулю n , а потому числа $\langle \alpha x + \beta y \rangle$ пробегают (в некотором порядке) ряд (2). Поэтому сумма

всех этих чисел равна сумме чисел ряда (2), т. е. равна $\frac{n(n-1)}{2}$. Для вертикальных рядов рассуждение аналогично (единственное отличие состоит в том, что меняется y , а x остается постоянным).

Таким образом, нам следует лишь выяснить условия магичности диагоналей.

Все сказанное до сих пор было справедливо для любых чисел n . Начиная с этого места, мы будем предполагать, что *число n нечетно*.

В этом случае наибольшие общие делители

$$\delta = (\alpha - \beta, n), \quad \delta_1 = (\alpha + \beta, n)$$

также нечетны, и потому дроби

$$\frac{\delta-1}{2}, \quad \frac{\delta_1-1}{2}$$

являются целыми числами. Кроме того,

числа δ и δ_1 взаимно просты.

Действительно, любой общий делитель d чисел δ и δ_1 должен делить числа $\alpha - \beta$ и $\alpha + \beta$, а потому и числа 2α и 2β ; будучи нечетным, он должен поэтому делить числа α и β . Кроме того, он делит число n . Поскольку числа α , β и n по условию взаимно просты, это возможно лишь при $d = 1$.

Поскольку числа δ и δ_1 взаимно просты,

дробь $\frac{n}{\delta\delta_1}$ является целым числом.

Будем искать сначала условия магичности нисходящей диагонали. Ее клетки характеризуются равенством $x + y = n - 1$, и потому она заполняется числами вида

$$\langle \alpha x + \beta y \rangle = \langle (\alpha - \beta)x + (n - 1)\beta \rangle = \langle (\alpha - \beta)x - \beta \rangle, \quad (3)$$

$$x = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Согласно общей теории (см. введение, п. 3) вычеты значений функции $(\alpha - \beta)x - \beta$ при $x = 0, 1, \dots, n - 1$ имеют вид

$$q, \delta + q, 2\delta + q, \dots, n - \delta + q,$$

где q — остаток от деления на δ числа $-\beta$, причем каждый из этих вычетов повторяется точно δ раз. Поэтому все значения выражения $\langle (\alpha - \beta)x - \beta \rangle$ при $x = 0, 1, \dots, n - 1$ содержатся в ряду

$$\langle q \rangle, \langle \delta + q \rangle, \langle 2\delta + q \rangle, \dots, \langle n - \delta + q \rangle, \quad (4)$$

и каждое из этих значений принимается точно δ раз.

Предположим теперь, что

А. Перестановка (1) такова, что числа (4), т. е. числа

$$i_p, i_{\delta+q}, i_{2\delta+q}, \dots, i_{n-\delta+q}$$

с точностью до порядка совпадают с числами

$$\frac{\delta-1}{2}, \delta + \frac{\delta-1}{2}, 2\delta + \frac{\delta-1}{2}, \dots, n - \delta + \frac{\delta-1}{2}. \quad (5)$$

Тогда сумма всех чисел нисходящей диагонали равна δ -кратной сумме чисел (5), т. е. равна

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{\delta-1}{2} + \delta + \frac{\delta-1}{2} + 2\delta + \frac{\delta-1}{2} + \dots + n - \delta + \frac{\delta-1}{2} \right) = \\ = \delta \left(\frac{n}{\delta} \left(\frac{\delta-1}{2} \right) + \frac{n\delta}{\delta} \left(\frac{n-\delta}{2\delta} \right) \right) = \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, при предположении **А** нисходящая диагональ обладает свойством магичности с суммой $\frac{n(n-1)}{2}$.

Рассмотрим, далее, восходящую диагональ. Клетки этой диагонали характеризуются равенством $x=y$, откуда вытекает, что она заполнена числами

$$\langle (\alpha + \beta) x \rangle, \quad x = 0, 1, \dots, n-1. \quad (6)$$

Аналогично случаю нисходящей диагонали легко видеть, что числа (6) имеют вид

$$\langle 0 \rangle, \langle \delta_1 \rangle, \langle 2\delta_1 \rangle, \dots, \langle n - \delta_1 \rangle, \quad (7)$$

причем каждое из этих чисел повторяется точно δ_1 раз.

Предположим теперь, что

В. Перестановка (1) такова, что числа (7), т. е. числа

$$i_0, i_{\delta_1}, i_{2\delta_1}, \dots, i_{n-\delta_1},$$

с точностью до порядка совпадают с числами

$$\frac{\delta_1-1}{2}, \delta_1 + \frac{\delta_1-1}{2}, 2\delta_1 + \frac{\delta_1-1}{2}, \dots, n - \delta_1 + \frac{\delta_1-1}{2}. \quad (8)$$

Тогда восходящая диагональ будет обладать свойством магичности (см. соответствующее рассуждение для нисходящей диагонали).

Таким образом, мы доказали, что

*если выполнены предположения **А** и **В**, то построенный указанным выше образом квадрат является вспомогательным магическим квадратом.*

Вообще говоря, системы чисел (5) и (8) могут содержать общие члены. Ввиду этого возникает вопрос о существовании перестановок, одновременно удовлетворяющих обоим предположениям **A** и **B**. В связи с этим заметим в первую очередь, что

*если $\delta = 1$ (или $\delta_1 = 1$), то предположение **A** (или соответственно предположение **B**) выполнено для любой перестановки (1).*

Поэтому, если $\delta = 1$ или $\delta_1 = 1$, то перестановки, одновременно удовлетворяющие обоим предположениям **A** и **B**, непременно существуют. Более того, оказывается, что

*перестановки, одновременно удовлетворяющие обоим предположениям **A** и **B**, существуют при любых δ и δ_1 ; число таких перестановок равно*

$$\left(\frac{n}{\delta\delta_1}\right)! \left(\frac{n\delta-n}{\delta\delta_1}\right)! \left(\frac{n\delta_1-n}{\delta\delta_1}\right)! \left(\frac{n\delta\delta_1-n\delta-n\delta_1+n}{\delta\delta_1}\right)! \quad (9)$$

Чтобы доказать это утверждение, мы сначала найдем число N_1 общих членов в рядах (4) и (7), т. е. число общих членов в рядах

$$q, \delta + q, 2\delta + q, \dots, n - \delta + q$$

и

$$0, \delta_1, 2\delta_1, \dots, n - \delta_1.$$

Очевидно, что это число равно числу целочисленных решений неопределенного уравнения

$$\delta z + q = \delta_1 z_1, \quad (10)$$

для которых $0 \leq z_1 \leq \frac{n}{\delta_1} - 1$. Так как числа δ и δ_1 взаимно просты, то уравнение (10) обладает хотя бы одним целочисленным решением (z^0, z_1^0) , причем любое другое его решение имеет вид

$$z = z^0 + \delta_1 t, \quad z_1 = z_1^0 - \delta t,$$

где t — некоторое целое число. Следовательно, число N_1 равно числу значений переменной t , для которых

$$0 \leq z_1^0 - \delta t \leq \frac{n}{\delta_1} - 1,$$

откуда непосредственно вытекает, что

$$N_1 = \frac{n}{\delta\delta_1}.$$

Аналогично, число N_2 общих членов в рядах (5) и (8) равно числу целочисленных решений неопределенного уравнения

$$\delta z + \frac{\delta-1}{2} = \delta_1 z_1 + \frac{\delta_1-1}{2},$$

для которых $0 \leq z_1 \leq \frac{n}{\delta_1} - 1$. По тем же соображениям, что и для уравнения (10), отсюда следует, что

$$N_2 = \frac{n}{\delta\delta_1}.$$

Таким образом, $N_1 = N_2$, т. е.

число общих членов в рядах (4) и (7) равно числу общих членов в рядах (5) и (8).

Отсюда ясно, что мы всегда можем построить перестановку, удовлетворяющую обоим предположениям **A** и **B**. Действительно, общим членам рядов (4) и (7) мы должны (в произвольном порядке) отнести общие члены рядов (5) и (8) (что можно сделать $\left(\frac{n}{\delta\delta_1}\right)!$ способами), остающимся членам ряда (4)—остающиеся члены ряда (5) (число способов $\left(\frac{n}{\delta} - \frac{n}{\delta\delta_1}\right)! = \left(\frac{n\delta_1 - n}{\delta\delta_1}\right)!$), а остающимся членам ряда (7)—остающиеся члены ряда (8) (число способов $\left(\frac{n}{\delta_1} - \frac{n}{\delta\delta_1}\right)! = \left(\frac{n\delta - n}{\delta\delta_1}\right)!$), после чего полученное соответствие мы должны произвольно дополнить до перестановки чисел $0, 1, \dots, n-1$ (что можно сделать $\left(n - \frac{n}{\delta} - \frac{n}{\delta_1} + \frac{n}{\delta\delta_1}\right)! = \left(\frac{n\delta\delta_1 - n\delta - n\delta_1 + n}{\delta\delta_1}\right)!$ способами). Тем самым существование требуемой перестановки доказано. Одновременно доказана и формула (9).

Резюмируя, мы получаем следующее

*Правило. Чтобы построить вспомогательный магический квадрат произвольного нечетного порядка n , следует выбрать два числа α и β , взаимно простых с n , и перестановку чисел $0, 1, \dots, n-1$, удовлетворяющую предположениям **A** и **B**. Построив затем по выбранной перестановке операцию $\langle \rangle$, следует основной квадрат заполнить числами $\langle \alpha x + \beta y \rangle$, где x и y —координаты его клеток.*

Пусть, например, $n = 15$, $\alpha = 4$, $\beta = 1$. В этом случае

$$\alpha - \beta = 3, \quad \alpha + \beta = 5,$$

$$\delta = 3, \quad \delta_1 = 5,$$

$$\varrho = 2,$$

ряд (4) имеет вид

$$\langle 2 \rangle, \langle 5 \rangle, \langle 8 \rangle, \langle 11 \rangle, \langle 14 \rangle,$$

ряд (5)— вид

$$1, 4, 7, 10, 13,$$

ряд (7)— вид

$$\langle 0 \rangle, \langle 5 \rangle, \langle 10 \rangle,$$

и, наконец, ряд (8)— вид

$$2, 7, 12.$$

Ряды (4) и (7), с одной стороны, и ряды (5) и (8), с другой, имеют по одному (так как $15/3 \cdot 5 = 1$) общему члену ($\langle 5 \rangle$ и 7 соответственно). Следовательно, должно быть

$$\langle 5 \rangle = 7.$$

Далее, мы можем, например, положить

$$\langle 2 \rangle = 4, \quad \langle 8 \rangle = 1, \quad \langle 11 \rangle = 10, \quad \langle 14 \rangle = 13,$$

$$\langle 0 \rangle = 12, \quad \langle 10 \rangle = 2.$$

Остающиеся числа

$$\langle 1 \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 4 \rangle, \langle 6 \rangle, \langle 7 \rangle, \langle 9 \rangle, \langle 12 \rangle, \langle 13 \rangle$$

мы должны сопоставить с еще не использованными числами

$$0, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 14.$$

Например:

$$\langle 1 \rangle = 0, \quad \langle 3 \rangle = 3, \quad \langle 4 \rangle = 6, \quad \langle 6 \rangle = 5, \quad \langle 7 \rangle = 14,$$

$$\langle 9 \rangle = 11, \quad \langle 12 \rangle = 8, \quad \langle 13 \rangle = 9.$$

Таким образом, мы получаем следующую перестановку чисел от 0 до 14, удовлетворяющую предположениям **A** и **B**:

$$12, 0, 4, 3, 6, 7, 5, 14, 1, 11, 2, 10, 8, 9, 13.$$

Для построения соответствующего вспомогательного квадрата мы должны вписать в клетки основного квадрата числа

$\langle 4x + y \rangle$. В частности, в нижнем горизонтальном ряду (для которого $y = 0$) должны быть помещены числа $\langle 4x \rangle$, т. е. числа

12, 6, 1, 8, 0, 7, 11, 9, 4, 5, 2, 13, 3, 14, 10.

Во втором горизонтальном ряду должны быть помещены числа $\langle 4x + 1 \rangle$, т. е. числа

6, 1, 8, 0, 7, 11, 9, 4, 5, 2, 13, 3, 14, 10, 12.

Эти числа получаются из чисел первого ряда циклической перестановкой (состоящей в том, что первое число переставляется в конец). Точно так же числа третьего ряда получаются циклической перестановкой чисел второго ряда и т. д.

Указанная особенность построения вспомогательного квадрата имеет общий характер. Именно, ясно, что

если $\beta = 1$, то в построенном по методу Деланжа вспомогательном магическом квадрате каждый следующий (считая снизу) горизонтальный ряд получается из предыдущего горизонтального ряда циклической перестановкой.

Рассмотрим еще случай, когда $\alpha = 1$, $\beta = 1$ (а n произвольно). В этом случае

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= 0, & \alpha + \beta &= 2, \\ \delta &= n, & \delta_1 &= 1, \\ \varrho &= n - 1, \end{aligned}$$

ряд (4) состоит из одного числа

$$\langle n - 1 \rangle,$$

а ряд (5) — из одного числа

$$\frac{n-1}{2} = m.$$

Следовательно, условие **A** сводится к требованию

$$\langle n - 1 \rangle = m,$$

а условие **B** выполнено автоматически (ибо $\delta_1 = 1$). С другой стороны, так как $\alpha = 1$, то в нижний горизонтальный ряд вписаны числа $\langle x \rangle$, т. е. вписана перестановка (1), а так как $\beta = 1$, то каждый следующий горизонтальный ряд получается из предыдущего ряда циклической перестановкой. Таким образом, мы получаем следующее

Правило. Для построения вспомогательного магического квадрата произвольного нечетного порядка $n = 2m + 1$ достаточно произвести следующие действия:

1) выбрать перестановку i_0, i_1, \dots, i_{n-1} чисел $0, 1, \dots, \dots, n-1$, для которой $i_{n-1} = m$;

2) заполнить нижний горизонтальный ряд числами i_0, i_1, \dots, i_{n-1} ;

3) остальные горизонтальные ряды заполнить последовательно снизу вверх так, чтобы каждый следующий ряд получался из предыдущего циклической перестановкой.

2	1	0	4	3
3	2	1	0	4
4	3	2	1	0
0	4	3	2	1
1	0	4	3	2

0	4	1	3	2
4	1	3	2	0
1	3	2	0	4
3	2	0	4	1
2	0	4	1	3

Рис. 10.

Аналогичное правило можно без труда сформулировать и для случая $\alpha = 1, \beta = -1$. Впрочем, легко видеть, что *вспомогательный магический квадрат, соответствующий числам $\alpha = 1, \beta = -1$ (и некоторой перестановке i_0, i_1, \dots, i_{n-1}), получается поворотом на 90° по часовой стрелке вспомогательного квадрата, соответствующего числам $\alpha = 1, \beta = 1$ (и «обратной» перестановке $i_{n-1}, i_{n-2}, \dots, i_0$).*

На рис. 10 изображены вспомогательные магические квадраты пятого порядка, соответствующие числам $\alpha = 1, \beta = 1$ и $\alpha = 1, \beta = -1$. Построение первого квадрата основывается на перестановке 1 0 4 3 2, а второго — на перестановке 2 0 4 1 3. Непосредственно ясно, что, повернув эти квадраты на 90° (первый — против часовой стрелки, а второй — по часовой стрелке), мы получим: из первого — вспомогательный магический квадрат, соответствующий числам $\alpha = 1, \beta = -1$ и перестановке 2 3 4 0 1, а из второго — вспомогательный магический квадрат, соответствующий числам $\alpha = 1, \beta = 1$ и перестановке 3 1 4 0 2.

3. Составление магического квадрата по двум вспомогательным

Как уже говорилось, для того чтобы построить по методу Делаира некоторый магический квадрат, нужно взять два вспомогательных магических квадрата, все числа первого квадрата умножить на n и сложить с увеличенными на единицу соответствующими числами второго квадрата. Получающийся при этом квадрат тогда и только тогда будет магическим квадратом, когда выполнено условие 2° из п. 1, т. е. когда все числа этого квадрата различны.

Пусть для построения первого вспомогательного квадрата выбраны числа α_1, β_1 и перестановка σ_1 , а для построения второго — числа α_2, β_2 и перестановка σ_2 . Операцию $\langle \rangle$, соответствующую перестановке σ_1 , мы будем отмечать индексом 1, а перестановке σ_2 — индексом 2.

Предположим, что в окончательном числовом квадрате в двух различных клетках (x_1, y_1) и (x_2, y_2) оказались одинаковые числа

$$\begin{aligned} n \langle \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 \rangle_1 + \langle \alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 \rangle_2 + 1 = \\ = n \langle \alpha_1 x_2 + \beta_1 y_2 \rangle_1 + \langle \alpha_2 x_2 + \beta_2 y_2 \rangle_2 + 1. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 \rangle_1 &= \langle \alpha_1 x_2 + \beta_1 y_2 \rangle_1, \\ \langle \alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 \rangle_2 &= \langle \alpha_2 x_2 + \beta_2 y_2 \rangle_2, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 &\equiv \alpha_1 x_2 + \beta_1 y_2 \pmod{n}, \\ \alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 &\equiv \alpha_2 x_2 + \beta_2 y_2 \pmod{n}, \end{aligned}$$

т. е. что

$$\begin{aligned} \alpha_1 (x_1 - x_2) + \beta_1 (y_1 - y_2) &\equiv 0 \pmod{n}, \\ \alpha_2 (x_1 - x_2) + \beta_2 (y_1 - y_2) &\equiv 0 \pmod{n}. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть теперь определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$$

взаимно прост с n . Тогда из сравнений (1) вытекает, что

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\equiv 0 \pmod{n}, \\ y_1 - y_2 &\equiv 0 \pmod{n}, \end{aligned}$$

т. е. что, вопреки условию, клетки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) совпадают. Полученное противоречие доказывает, что

если определитель Δ взаимно прост с n , то условие 2° из п. 1 выполнено.

Резюмируя, мы получаем следующее окончательное правило для построения магических квадратов произвольного нечетного порядка по методу Делайра.

Правило. Для построения магического квадрата нечетного порядка n следует выбрать четыре таких взаимно простых с n числа $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ и β_2 , что определитель

$$\Delta = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$$

взаимно прост с n . Затем следует выбрать две перестановки степени n , из которых первая удовлетворяет предположениям А и В по отношению к числам α_1 и β_1 , а вторая — по отношению к числам α_2 и β_2 , и построить по ним два вспомогательных магических квадрата. Все числа первого вспомогательного квадрата нужно умножить на n и сложить с увеличенными на единицу соответствующими числами второго квадрата. Полученный числовой квадрат и будет магическим.

Аналитически метод Делайра записывается формулами

$$\begin{aligned} r &= \langle \alpha_1 x + \beta_1 y \rangle_1, \\ s &= \langle \alpha_2 x + \beta_2 y \rangle_2. \end{aligned} \quad (2)$$

З а м е ч а н и е. Естественное обобщение

$$\begin{aligned} r &= \langle \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 \rangle_1, \\ s &= \langle \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 \rangle_2 \end{aligned}$$

этих формул новых магических квадратов не дает, так как прибавление ко всем вычетам одного и того же числа сводится к некоторой перестановке полной системы вычетов.

Условия, наложенные на числа $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$, в частности, выполнены при $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 1, \alpha_2 = 1, \beta_2 = -1$. Вспоминая сказанное в конце предыдущего пункта по поводу вспомогательных квадратов, соответствующих числам $\alpha = 1, \beta = 1$ и $\alpha = 1, \beta = -1$, мы немедленно получаем следующее более частное, но более удобное для практического применения

Правило. Для построения магического квадрата произвольно нечетного порядка $n = 2t + 1$ достаточно

1) *выбрать две такие перестановки i_0, i_1, \dots, i_{n-1} и $i'_0, i'_1, \dots, i'_{n-1}$ чисел $0, 1, \dots, n-1$, что $i_{n-1} = i'_{n-1} = t$;*

2) построить по этим перестановкам вспомогательные магические квадраты согласно правилу, сформулированному в конце предыдущего пункта;

11	10	2	24	18
20	12	9	3	21
22	19	13	6	5
4	23	16	15	7
8	1	25	17	14

Рис. 11.

3) второй из построенных квадратов повернуть на 90° по часовой стрелке;

4) все числа первого квадрата умножить на n и сложить с увеличенными на единицу соответствующими числами повернутого второго квадрата.

Например, выбрав при $n=5$ перестановки 1 0 4 3 2 и 3 1 4 0 2, мы получим вспомогательные магические квадраты, изображенные на рис. 10 (см. выше). Соответствующий этим вспомогательным квадратам магический квадрат изображен на рис. 11.

ГЛАВА 4

МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Методы построения магических квадратов с четным числом клеток изучены значительно меньше, чем методы построения магических квадратов нечетного порядка. Все они существенно нелинейны и потому менее изящны и более кропотливы, чем рассмотренные выше линейные и квазилинейные методы. Как правило, в этих методах из чисел $1, 2, \dots, n^2$ сначала строится некий вспомогательный квадрат, клетки которого затем переставляются так, чтобы получился магический квадрат. Все основные черты такого рода методов с достаточной выпуклостью проявляются уже в простейшем (и наиболее общем) из этих методов, предложенном английским математиком Раус-Боллом. Поэтому мы ограничимся изложением лишь этого метода.

1. Метод Раус-Болла построения магических квадратов четного порядка

Построение магического квадрата порядка $n = 2m$ по методу Раус-Болла начинается с того, что основной квадрат заполняется слева направо и сверху вниз числами от 1 до n^2 в их естественном порядке. Таким образом, в первый сверху горизонтальный ряд вписываются числа $1, 2, \dots, n$, во второй — числа $n + 1, n + 2, \dots, 2n$ и вообще в p -й горизонтальный ряд, где $1 \leq p \leq n$, вписываются числа $(p - 1)n + 1, (p - 1)n + 2, \dots, pn$.

Полученный числовой квадрат не является, конечно, магическим. Однако нетрудно видеть, что

обе его диагонали обладают свойством магичности, т. е. для каждой диагонали сумма ее чисел равна

требуемой величине

$$\Sigma = \frac{n(n^2+1)}{2} = m(4m^2+1).$$

Действительно, на нисходящей диагонали стоят, очевидно, числа

$$1, n+2, 2n+3, \dots, (p-1)n+p, \dots, n^2,$$

сумма которых равна

$$\begin{aligned} 1+2+\dots+n+n(1+2+\dots+n-1) &= \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n^2+1)}{2}. \end{aligned}$$

Аналогично на восходящей диагонали стоят числа

$$n, 2n-1, 3n-2, \dots, pn-p+1, \dots, n^2-n+1$$

с суммой

$$\begin{aligned} n(1+2+\dots+n)-(1+2+\dots+n-1) &= \\ &= n \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n^2+1)}{2}. \end{aligned}$$

Что же касается, скажем, горизонтальных рядов, то сумма s_p чисел p -го (считая сверху) горизонтального ряда выражается, как легко видеть, формулой

$$s_p = \frac{n(n+1)}{2} + (p-1)n^2 = m(2m+1) + 4m^2(p-1).$$

Заменяя в этой формуле p на $n-p+1$, мы получим, что

$$s_{n-p+1} = m(2m+1) + 4m^2(2m-p),$$

откуда следует, что

$$s_p + s_{n-p+1} = 2m(2m+1) + 4m^2(2m-1) = 2\Sigma,$$

где

$$\Sigma = m(4m^2+1).$$

Заметив, что ряды с номерами p и $n-p+1$ симметричны относительно средней линии квадрата, мы получаем отсюда,

что хотя горизонтальные ряды и не удовлетворяют условию магичности, но

сумма чисел одного из двух симметричных рядов настолько меньше требуемой величины Σ , насколько сумма чисел другого ряда больше этой величины.

В соответствующих друг другу клетках двух симметричных горизонтальных рядов находятся числа

$$(p-1)n + i, \quad (n-p)n + i,$$

разность t_p которых равна

$$(n-2p+1)n$$

и, следовательно, одна и та же для всех клеток. Поэтому

$$s_{n-p+1} - s_p = nt_p,$$

откуда вытекает, что

$$s_{n-p+1} - mt_p = s_p + mt_p.$$

Из этого равенства следует, что

если в двух симметричных рядах переставить между собой числа, стоящие в t парах взаимно симметричных клеток, то суммы чисел этих рядов будут равны Σ .

Таким образом,

выбрав в каждой паре симметричных горизонтальных рядов по t пар взаимно симметричных клеток и переставив числа каждой пары, мы получим числовой квадрат, для которого условие магичности будет выполнено для всех горизонтальных рядов.

Однако свойство магичности диагоналей может при этом нарушиться.

Совершенно аналогично дело обстоит и для вертикальных рядов. Действительно, в p -м (считая слева) вертикальном ряду стоят числа

$$p, p+n, p+2n, \dots, p+n(n-1),$$

сумма \bar{s}_p которых выражается формулой

$$\bar{s}_p = \frac{n^2(n-1)}{2} + np = 2m^2(2m-1) + 2mp.$$

Отсюда следует, что

$$\bar{s}_p + \bar{s}_{n-p+1} = 2\Sigma.$$

Далее, в соответствующих друг другу клетках двух симметричных (относительно средней вертикальной линии) рядах находятся числа

$$p + (i - 1)n, \quad in - p + 1,$$

разность которых

$$\bar{t}_p = n - 2p + 1$$

не зависит от i . Следовательно,

$$\bar{s}_{n-p+1} - \bar{s}_p = n\bar{t}_p,$$

и потому

$$\bar{s}_{n-p+1} - m\bar{t}_p = \bar{s}_p + m\bar{t}_p.$$

Как и для горизонтальных рядов, отсюда следует, что, *выбрав в каждой паре симметричных вертикальных рядов по m пар взаимно симметричных клеток и переставив числа каждой пары, мы получим числовой квадрат, для которого условие магичности будет выполнено для всех вертикальных рядов.*

Однако при этом снова может нарушиться магичность диагоналей.

Резюмируя, мы видим, что соответствующими перестановками симметричных клеток можно сделать магическими отдельно либо горизонтальные, либо вертикальные ряды. Возникает вопрос, нельзя ли скомбинировать эти перестановки таким образом, чтобы одновременно достичь магичности как горизонтальных, так и вертикальных рядов, не испортив при этом магичности диагоналей? Ответ на этот вопрос оказывается утвердительным. Именно, как мы покажем в следующих пунктах,

существует такая перестановка T клеток основного квадрата, что

1°. Если клетка σ под воздействием перестановки T переходит в клетку $\tau = T\sigma$, то, наоборот, клетка τ под воздействием перестановки T переходит в клетку σ :

$$\sigma = T\tau;$$

2°. В каждом ряду (как горизонтальном, так и вертикальном) существует точно m клеток, которые под воздействием перестановки T переходят в m клеток симметричного ряда; остальные клетки этого ряда под воздействием перестановки T остаются на месте;

3°. Если клетка σ принадлежит одной из диагоналей, то клетка $T\sigma$ также принадлежит той же диагонали.

Условие 1° называется условием инволютивности. Из него следует, что система всех клеток, не остающихся под воздействием перестановки T на месте, распадается на пары $(\sigma, T\sigma)$ взаимно перемещаемых клеток. Задание системы этих пар, очевидно, полностью определяет перестановку T .

Из всего сказанного выше немедленно вытекает следующее

Правило. Для построения магического квадрата четного порядка n следует выбрать перестановку T , удовлетворяющую перечисленным выше условиям 1°, 2° и 3°, и затем, заполнив клетки основного квадрата числами $1, 2, \dots, n^2$ в их естественном порядке, переставить между собой числа, находящиеся в клетках, взаимно перемещаемых перестановкой T .

При этом условие 2°, наложенное на перестановку T , обеспечит магичность горизонтальных и вертикальных рядов, а условие 3° обеспечит сохранение магичности диагоналей.

Таким образом, для полного обоснования изложенного метода построения магических квадратов нам остается лишь доказать существование требуемых перестановок T . Мы сделаем это в $n^{\circ}2$ и $n^{\circ}4$, указав практический прием их построения.

2. Построение перестановок T в случае четного m

Пусть в основном квадрате отмечены четыре клетки $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2$, расположенные таким образом, что клетки σ_1 и σ_2 симметричны относительно средней горизонтальной линии квадрата соответственно клеткам τ_1 и τ_2 , а клетки σ_1 и τ_1 симметричны относительно средней вертикальной линии квадрата соответственно клеткам σ_2 и τ_2 . Тогда клетки σ_1 и τ_1 центрально симметричны относительно центра квадрата соответственно клеткам τ_2 и σ_2 . Перестановку S , переставляющую клетки σ_1 и τ_1 соответственно с центрально симметричными клетками τ_2 и σ_2 и оставляющую все другие клетки основного квадрата неподвижными, мы будем называть *элементарной перестановкой*, соответствующей данной четверке клеток. Эта перестановка первоначальную конфигурацию клеток

$$\begin{array}{cc} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \tau_1 & \tau_2 \end{array}$$

переводит в конфигурацию

$$\begin{matrix} \tau_2 & \tau_1 \\ \sigma_2 & \sigma_1. \end{matrix}$$

Ясно, что элементарная перестановка S обладает свойствами 1° и 3° перестановки T .

Предположим теперь, что число m четно, $m = 2l$, и что в основном квадрате отмечено $2m^2 = 8l^2$ клеток, удовлетворяющих следующим условиям:

1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64

Рис. 12.

а) отмеченные клетки распадаются на $2l^2$ четверок, обладающих указанными выше свойствами симметрии;

б) в каждом горизонтальном или вертикальном ряду содержится точно m отмеченных клеток.

Каждой из предусмотренных условий а) четверок соответствует своя элементарная перестановка S . Очевидно, что если мы произведем все эти перестановки одновременно,

то в результате мы получим некоторую перестановку T , обладающую всеми требуемыми свойствами 1° , 2° и 3° .

Таким образом, вопрос о построении перестановки T сводится к вопросу о построении системы клеток, удовлетворяющих условиям а), б).
Красивый метод построения такой системы клеток принадлежит французским математикам Деланэ и Мондезиру. Согласно этому методу, для того чтобы построить требуемую систему клеток, нужно на бесконечно простирающуюся во все стороны «шахматную доску», каждое поле которой вчетверо больше клетки основного квадрата, наложить основной квадрат так, чтобы его центр попал в центр одного из полей доски и отметить клетки, попадающие на поля одного цвета (см. рис. 12 для $m = 4$; на этом рисунке изображен также соответствующий магический квадрат),

Системами клеток, строящимися по способу Деланэ и Мондезира, не исчерпываются, конечно, все системы клеток, удовлетворяющие условиям а) и б). Общий метод построения таких систем состоит в том, что основной квадрат разбивается на четыре одинаковых квадрата порядка m и в левом верхнем квадрате (будем обозначать этот квадрат символом K) выбирается такая система $2l^2$ клеток, что:

а) в каждом горизонтальном или вертикальном ряду квадрата K находится точно l клеток этой системы.

Ясно, что если мы для каждой клетки указанной системы построим клетки, симметричные ей относительно центра и обеих средних линий основного квадрата, то в результате мы в основном квадрате получим систему $8l^2$ клеток, удовлетворяющую условиям а) и б). Таким образом, все сводится к построению в квадрате K системы $2l^2$ клеток, обладающих свойством а).

Построение такой системы можно осуществить многими различными способами. Например, можно в первом левом вертикальном ряду квадрата K произвольно выбрать l клеток, находящихся в горизонтальных рядах, имеющих (считая сверху), скажем, номера i_1, i_2, \dots, i_l . Затем во втором вертикальном ряду выбрать клетки с номерами $i_1 + 1, i_2 + 1, \dots, i_l + 1$ и вообще в p -м ряду, где $1 \leq p \leq n$, выбрать клетки с номерами $i_1 + p - 1, i_2 + p - 1, \dots, i_l + p - 1$. При этом, если какая-нибудь из клеток окажется вне квадрата K , то она должна быть заменена клеткой, эквивалентной ей по отношению к этому квадрату. Тем самым в каждом вертикальном ряду будет выбрано точно l клеток. Так как для любого $k = 1, 2, \dots, l$ числа $i_k, i_k + 1, \dots, i_k + p - 1, \dots, i_k + m - 1$ составляют полную систему вычетов по модулю m , то для любого $i = 1, 2, \dots, m$ существует такое число $p_{i,k} = 1, 2, \dots, m$, что

$$i \equiv i_k + p_{i,k} - 1 \pmod{m},$$

откуда непосредственно следует, что в каждом, скажем, i -м горизонтальном ряду также будет находиться точно l выбранных клеток (а именно, клеток из вертикальных рядов с номерами $p_{i,1}, p_{i,2}, \dots, p_{i,l}$).

Этот способ построения требуемой системы клеток, хотя и довольно общий, но все же не позволяет получить все такие системы. Другие системы можно, например, получить,

поворачивая квадрат K на четверть окружности в положительном или отрицательном направлении. Еще две системы можно получить, разбивая квадрат K на четыре одинаковых квадрата и отмечая либо клетки верхнего левого и нижнего правого квадратов, либо клетки верхнего правого и нижнего левого квадратов. Можно, наконец, воспользоваться методом Деланэ и Мондезира (применительно к квадрату K).

Резюмируя все сказанное, мы получаем следующее

Правило. Для того чтобы в случае четного t построить перестановку T , обладающую свойствами 1°, 2° и 3°, указанными в предыдущем пункте, нужно

1) *разделить основной квадрат на четыре одинаковых квадрата порядка t ;*

2) *построить (например, одним из описанных выше способов) в левом верхнем квадрате систему клеток, обладающую свойством а), и отметить их некоторым знаком (скажем, звездочкой);*

3) *для каждой из построенных клеток найти в основном квадрате клетки, симметричные ей относительно центра и обеих средних линий, и отметить эти клетки тем же знаком.*

После того как это сделано, перестановка T определяется как перестановка, взаимно перемещающая отмеченные центрально-симметричные клетки и оставляющая все неотмеченные клетки на месте.

3. Примеры

Для лучшего уяснения изложенного метода построения магических квадратов порядка $n = 2t$ при t четном проиллюстрируем этот метод на примерах.

Пусть сначала $n = 4$ и, следовательно, $t = 2$, $l = 1$. В этом случае квадрат K имеет второй порядок и отметить в нем клетки мы можем только двумя способами:

*	
	*

	*
*	

В соответствии с этим мы получаем следующие два способа отметить клетки основного квадрата четвертого

порядка, заполненного числами от 1 до 16 в их естественном порядке:

1^*	2	3	4^*
5	6^*	7^*	8
9	10^*	11^*	12
13^*	14	15	16^*

1	2^*	3^*	4
5^*	6	7	8^*
9^*	10	11	12^*
13	14^*	15^*	16

Переставляя отмеченные центрально-симметричные клетки, мы окончательно получим следующие магические квадраты:

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Переставив в первом из этих квадратов средние вертикальные ряды, мы получим квадрат Дюрера, изображенный на рис. 1.

Пусть теперь $n=8$ и, следовательно, $m=4$, $l=2$. В этом случае отметить клетки квадрата K можно довольно многими способами (читателю рекомендуется самостоятельно найти точное число этих способов). Мы сделаем это, следуя указанному в п. 2 общему методу, принимая $i_1=2$, $i_2=3$. В результате мы получим следующее размещение звездочек:

		*	*
*			*
*	*		
	*	*	

После этого мы заполняем основной квадрат восьмого порядка числами от 1 до 64 в их естественном порядке и

расставляем в нем звездочки:

1	2	3*	4*	5*	6*	7	8
9*	10	11	12*	13*	14	15	16*
17*	18*	19	20	21	22	23*	24*
25	26*	27*	28	29	30*	31*	32
33	34*	35*	36	37	38*	39*	40
41*	42*	43	44	45	46	47*	48*
49*	50	51	52*	53*	54	55	56*
57	58	59*	60*	61*	62*	63	64

Произведя взаимную замену центрально-симметричных клеток, отмеченных звездочками, окончательно получим магический квадрат:

1	2	62	61	60	59	7	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	47	19	20	21	22	42	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	23	43	44	45	46	18	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	58	6	5	4	3	63	64

4. Построение перестановок T в случае нечетного m

Если число m нечетно, $m = 2l + 1$, то построение перестановок T производится аналогично, хотя и несколько сложнее. Оказывается, что в этом случае описанных в п. 2

элементарных перестановок для построения перестановок T уже недостаточно. Мы введем еще *элементарные перестановки* U , взаимно перемещающие две клетки, симметричные относительно средней горизонтальной линии основного квадрата, и *элементарные перестановки* V , взаимно перемещающие две клетки, симметричные относительно средней вертикальной линии основного квадрата. (Предполагается, что все остальные клетки основного квадрата перестановки U и V оставляют на месте.) Ясно, что перестановки U и V обладают свойством 1° , требуемым от перестановки T ; что же касается свойства 3° , то они обладают им тогда и только тогда, когда переставляемые клетки не принадлежат диагоналям.

Заметим, что любая перестановка S сводится, как легко видеть, к выполнению двух перестановок U и двух перестановок V . Однако нам будет удобно рассматривать перестановки S независимо от перестановок U и V .

Предположим теперь, что в основном квадрате отмечены три группы клеток, удовлетворяющие следующим условиям:

а) *клетки первой группы (состоящей из $4tl$ клеток) распадаются на tl четверок, обладающих указанными в п. 2 свойствами симметрии;*

б) *клетки второй и третьей групп (состоящих каждая из $2t$ клеток) распадаются на t пар, состоящих из клеток, симметричных относительно средней горизонтальной (соответственно вертикальной) линии основного квадрата;*

в) *в каждом горизонтальном и вертикальном ряду находится точно $t = 2l + 1$ отмеченных клеток, причем $2l$ из них принадлежат первой группе, а одна — второй группе, если рассматриваемый ряд горизонтален, и третьей группе, если этот ряд вертикален;*

г) *ни одна из клеток второй и третьей групп не принадлежит ни одной из диагоналей.*

Каждой из предусмотренных условием а) четверок соответствует своя элементарная перестановка S , а каждой из предусмотренных условием б) пар — элементарная перестановка U , если эта пара состоит из клеток второй группы, и элементарная перестановка V , если эта пара состоит из клеток третьей группы. Результат применения всех этих перестановок представляет собой некоторую перестановку T , которая обладает свойствами 1° (очевидно), 2° (в силу условия в)) и 3° (в силу условия г)).

Таким образом, вопрос о построении перестановки T сводится к вопросу о построении в основном квадрате трех групп клеток, удовлетворяющих условиям а) — г).

Для того чтобы построить такие группы клеток, мы, как и в п. 2, разобьем основной квадрат на четыре одинаковых квадрата порядка m и предположим, что в левом верхнем квадрате K выбраны три группы клеток, состоящие соответственно из ml , m и m клеток, и обладающие следующими свойствами:

а) в каждом горизонтальном или вертикальном ряду квадрата K находится точно l клеток первой группы;

б) в каждом горизонтальном ряду квадрата K находится точно одна клетка второй группы, а в каждом вертикальном ряду — точно одна клетка третьей группы;

в) ни одна клетка второй или третьей группы не принадлежит нисходящей диагонали квадрата K .

Ясно, что если мы для клеток первой группы построим в основном квадрате клетки, симметричные им относительно центра и обеих средних линий основного квадрата, для клеток второй группы — клетки, симметричные им относительно средней горизонтальной линии основного квадрата, и, наконец, для клеток третьей группы — клетки, симметричные им относительно средней вертикальной линии основного квадрата, то получившиеся три группы клеток будут удовлетворять условиям а) — г). Таким образом, все сводится к построению в квадрате K трех групп клеток, обладающих свойствами а) — в).

Построение этих групп можно осуществить, например, следующим образом. В первом слева вертикальном ряду квадрата K выбираем $l+2$ клетки. Пусть эти клетки лежат в горизонтальных рядах с номерами $i_1, i_2, \dots, i_l, j, k$ (номера мы, как и выше, считаем сверху вниз). Клетки можно выбирать совершенно произвольно, с единственным ограничением, чтобы ни число j , ни число k не было равно единице. Ясно, что при $l \geq 1$, т. е. при $m \geq 3$, этому условию всегда можно удовлетворить. Далее, во втором вертикальном ряду выбираем клетки, лежащие в горизонтальных рядах с номерами $i_1+1, i_2+1, \dots, i_l+1, j+1, k+1$, в третьем вертикальном ряду — клетки, лежащие в горизонтальных рядах с номерами $i_1+2, i_2+2, \dots, i_l+2, j+2, k+2$, и вообще

в p -м вертикальном ряду, где $1 \leq p \leq m$, выбираем клетки, лежащие в горизонтальных рядах с номерами $i_1 + p - 1$, $i_2 + p - 1$, ..., $i_l + p - 1$, $j + p - 1$, $k + p - 1$. При этом, если какая-нибудь из клеток окажется вне квадрата K , то ее следует заменить клеткой, эквивалентной ей по отношению к этому квадрату. Клетки, соответствующие числам вида $i_s + p - 1$, мы отнесем к первой группе. Тот факт, что они удовлетворяют условию α), проверяется дословно так же, как и соответствующее утверждение в п. 2. Клетки, соответствующие числам вида $j + p - 1$, мы отнесем ко второй группе. Они удовлетворяют условию β), потому что числа вида $j + p - 1$ составляют полную систему вычетов по модулю m , и условию γ), потому что $j \neq 1$. Наконец, клетки, соответствующие числам вида $k + p - 1$, мы отнесем к третьей группе. Они удовлетворяют условию β) по построению, а условию γ) из-за того, что $k \neq 1$.

На практике клетки трех групп удобно отмечать тремя различными значками; например, звездочкой $*$, прямым крестиком $+$ и косым крестиком \times .

Исключенный выше случай $l = 0$, т. е. случай $n = 2$, интереса не представляет, ибо, как легко видеть, в этом случае магических квадратов не существует.

Резюмируя все сказанное, мы получаем следующее

Правило. Для того чтобы в случае нечетного $m > 1$ построить перестановку T , обладающую указанными в п. 1 свойствами 1° , 2° и 3° , нужно

1) *разделить основной квадрат на четыре одинаковых квадрата порядка m ;*

2) *построить (например, описанным выше способом) в левом верхнем квадрате три группы клеток, обладающих свойствами α), β) и γ), и отметить клетки первой группы знаком $*$, второй — знаком $+$, и третьей — знаком \times ;*

3) *для каждой из клеток, отмеченных знаком $*$, построить клетки, симметричные ей относительно центра и обеих средних линий основного квадрата, и отметить их тем же знаком $*$;*

4) *для каждой из клеток, отмеченных знаком $+$, построить клетку, симметричную ей относительно горизонтальной средней линии основного квадрата, и отметить ее тем же знаком $+$;*

5) *для каждой из клеток, отмеченных знаком \times , построить клетку, симметричную ей относительно*

вертикальной средней линии основного квадрата, и отметить ее тем же знаком \times .

После того как это сделано, перестановка T определяется как перестановка, оставляющая все неотмеченные клетки на месте и взаимно перемещающая

а) отмеченные знаком $*$ центрально-симметричные клетки;

б) отмеченные знаком $+$ клетки, симметричные относительно горизонтальной средней линии основного квадрата;

в) отмеченные знаком \times клетки, симметричные относительно вертикальной средней линии основного квадрата.

5. Примеры

В первую очередь мы рассмотрим простейший случай $l=1$, $m=3$, $n=6$. В этом случае клетки квадрата K можно разметить только двумя способами:

*	+	×
×	*	+
+	×	*

*	×	+
+	*	×
×	+	*

которым соответствуют следующие два способа разметки основного квадрата:

1^*	2^+	3^*	4^*	5	6^*
7^*	8^*	9^+	10	11^*	12^*
13^+	14^*	15^*	16^*	17^*	18
19^+	20	21^*	22^*	23	24
25	26^*	27^+	28	29^*	30
31^*	32^+	33	34	35	36^*

1^*	2^*	3^+	4	5^*	6^*
7^+	8^*	9^*	10^*	11^*	12
13^*	14^+	15^*	16^*	17	18^*
19	20^+	21^*	22^*	23^+	24
25^+	26^*	27	28	29^*	30
31^*	32	33^+	34	35	36^*

Переставляя в этих квадратах, во-первых, центрально-симметричные клетки, отмеченные знаком *, во-вторых, симметричные относительно горизонтальной средней линии клетки, отмеченные знаком +, и, наконец, в-третьих, симметричные относительно вертикальной средней линии клетки, отмеченные знаком X, мы получим магические квадраты:

36	32	4	3	5	31
12	29	27	10	26	7
19	17	22	21	14	18
13	20	16	15	23	24
25	11	9	28	8	30
6	2	33	34	35	1

36	5	33	4	2	31
25	29	10	9	26	12
18	20	22	21	17	13
19	14	16	15	23	24
7	11	27	28	8	30
6	32	3	34	35	1

Рассмотрим еще случай $n=10$. В этом случае мы можем разметить основной квадрат, например, следующим образом:

	+	X	*	*	*	*	X		
*		+	X	*	*	X			*
*	*		+	X	X			*	*
X	*	*		+			*	*	X
+	X	*	*			*	*	X	
+		*	*			*	*		
	*	*		+			*	*	
*	*		+					*	*
*		+		*	*				*
	+		*	*	*	*			

Произведя соответствующие перестановки, мы получим магический квадрат:

<i>1</i>	<i>92</i>	<i>8</i>	<i>97</i>	<i>96</i>	<i>95</i>	<i>94</i>	<i>3</i>	<i>9</i>	<i>10</i>
<i>90</i>	<i>12</i>	<i>83</i>	<i>17</i>	<i>86</i>	<i>85</i>	<i>14</i>	<i>18</i>	<i>19</i>	<i>81</i>
<i>80</i>	<i>79</i>	<i>23</i>	<i>74</i>	<i>26</i>	<i>25</i>	<i>27</i>	<i>28</i>	<i>72</i>	<i>71</i>
<i>40</i>	<i>69</i>	<i>68</i>	<i>34</i>	<i>65</i>	<i>36</i>	<i>37</i>	<i>63</i>	<i>62</i>	<i>31</i>
<i>51</i>	<i>49</i>	<i>58</i>	<i>57</i>	<i>45</i>	<i>46</i>	<i>54</i>	<i>53</i>	<i>42</i>	<i>50</i>
<i>41</i>	<i>52</i>	<i>48</i>	<i>47</i>	<i>55</i>	<i>56</i>	<i>44</i>	<i>43</i>	<i>59</i>	<i>60</i>
<i>61</i>	<i>39</i>	<i>38</i>	<i>64</i>	<i>35</i>	<i>66</i>	<i>67</i>	<i>33</i>	<i>32</i>	<i>70</i>
<i>30</i>	<i>29</i>	<i>73</i>	<i>24</i>	<i>75</i>	<i>76</i>	<i>77</i>	<i>78</i>	<i>22</i>	<i>21</i>
<i>20</i>	<i>82</i>	<i>13</i>	<i>84</i>	<i>16</i>	<i>15</i>	<i>87</i>	<i>88</i>	<i>89</i>	<i>11</i>
<i>91</i>	<i>2</i>	<i>93</i>	<i>7</i>	<i>6</i>	<i>5</i>	<i>4</i>	<i>98</i>	<i>99</i>	<i>100</i>

Дальнейшие примеры читателю рекомендуется рассмотреть самостоятельно.

ДОБАВЛЕНИЕ

ИНДУКТИВНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МАГИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

В этом добавлении излагается метод построения по данному магическому квадрату порядка $n-2$ магических квадратов порядка n , где n — произвольное (безразлично, четное или нечетное) натуральное число (больше четырех). Исходя из некоторого магического квадрата третьего или четвертого порядка и повторяя нужное число раз это построение, мы можем получить магические квадраты любого данного порядка n . Грубо говоря, этот метод состоит в том, что данный магический квадрат порядка $n-2$ сначала подходящим образом видоизменяется (с сохранением свойства магичности), а затем получившийся «обобщенный магический квадрат» окаймляется до магического квадрата порядка n . Таким образом, индуктивным методом заведомо можно построить не все магические квадраты, а лишь те, для которых свойство магичности сохраняется после вычеркивания крайних рядов (т. е. верхнего и нижнего горизонтальных и правого и левого вертикальных).

1. Описание метода

Два числа ряда

$$1, 2, \dots, n^2 - 1, n^2 \tag{1}$$

мы будем называть *взаимно дополнительными*, если их сумма равна $n^2 + 1$, т. е. если они в ряду (1) равноотстоят от концов этого ряда. Число, дополнительное числу a , мы будем обозначать символом \bar{a} . Таким образом,

$$\bar{1} = n^2, \quad \bar{2} = n^2 - 1, \quad \dots, \quad \overline{n^2 - 1} = 2, \quad \overline{n^2} = 1.$$

При n четном все числа ряда (1) распадаются на пары (a, \bar{a}) взаимно дополнительных чисел. При n нечетном это верно для всех чисел ряда (1), за исключением среднего числа $\frac{n^2+1}{2}$, которое дополнительно самому себе. Число пар взаимно дополнительных чисел равно $\frac{n^2}{2} = 2m^2$ при $n = 2m$ и равно $\frac{n^2-1}{2} = 2m(m+1)$ при $n = 2m+1$.

Квадрат порядка $n-2$, в котором размещены различные числа из ряда (1), мы будем называть *обобщенным магическим квадратом*, если

1) сумма чисел каждого вертикального или горизонтального ряда, а также обеих диагоналей, равна

$$\Sigma' = \frac{(n-2)(n^2+1)}{2};$$

2) вместе с некоторым числом a ряда (1) в этот квадрат входит также и дополнительное число \bar{a} .

Из чисел ряда (1) не используется для построения обобщенного магического квадрата $n^2 - (n-2)^2 = 4(n-1)$ чисел, причем в силу условия 2) эти неиспользованные числа распадаются на $2(n-1)$ пар взаимно дополнительных чисел (отсюда, между прочим, следует, что при нечетном n дополнительное самому себе число $\frac{n^2+1}{2}$ обязательно входит в состав обобщенного магического квадрата).

Легко видеть, что,

увеличив все числа некоторого магического квадрата порядка $n-2$ на $2n-2$, мы получим обобщенный магический квадрат.

Действительно, сумма чисел каждого ряда (и обеих диагоналей) получившегося квадрата равна

$$\frac{(n-2)((n-2)^2+1)}{2} + (2n-2)(n-2) = \frac{(n-2)(n^2+1)}{2},$$

так что он удовлетворяет условию 1). Кроме того, этот квадрат состоит из чисел

$$1 + 2n - 2 = 2n - 1,$$

$$2 + 2n - 2 = 2n,$$

.....

$$(n-2)^2 - 1 + 2n - 2 = n^2 - 2n + 1,$$

$$(n-2)^2 + 2n - 2 = n^2 - 2n + 2,$$

так что он удовлетворяет и условию 2) (равноотстоящие сверху и снизу числа взаимно дополнительные).

Обобщенные магические квадраты, получающиеся описанным способом из магических квадратов порядка $n-2$, мы будем называть *специальными магическими квадратами*.

Не следует думать, что специальными магическими квадратами исчерпываются все обобщенные магические квадраты. Например, мы можем получить обобщенный магический квадрат из квадрата Дюрера (см. рис. 1 на стр. 19), оставляя неизменными числа 1, 2, ..., 8 и увеличивая все остальные числа на 20 (рис. 13;

36	3	2	33
5	30	31	8
29	6	7	32
4	35	34	1

Рис. 13.

для этого квадрата $n=6$, и потому $\bar{a}=37-a$). Однако процесс построения специальных магических квадратов является, по-видимому, единственным общим методом превращения любого магического квадрата порядка $n-2$ в обобщенный магический квадрат.

Мы будем говорить, что некоторый магический квадрат K порядка n получается *окаймлением* обобщенного магического квадрата K' порядка $n-2$, если, удаляя из квадрата K его крайние ряды (т. е. верхний и нижний горизонтальные и правый и левый вертикальные), мы получим квадрат K' . Пример

такого квадрата приведен на рис. 14. Этот квадрат получается окаймлением обобщенного магического квадрата, изображенного на рис. 13.

Пусть

$$a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} \quad (2)$$

и

$$a_0^*, a_1^*, \dots, a_{n-2}^*, a_{n-1}^*$$

Рис. 14.

— верхний и нижний горизонтальные ряды квадрата K . Так как для любого $i=1, \dots, n-2$ сумма чисел i -го вертикального ряда квадрата K_1 , очевидно, равна $a_i + \Sigma' + a_i^*$, то

$$a_i + \Sigma' + a_i^* = \Sigma.$$

Следовательно,

$$a_i + a_i^* = \frac{n(n^2+1)}{2} - \frac{(n-2)(n^2+1)}{2} = n^2 + 1,$$

т. е.

$$a_i^* = \bar{a}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-2.$$

Аналогично, сумма членов восходящей диагонали квадрата K равна

$$a_0^* + \Sigma' + a_{n-1},$$

а нисходящей—

$$a_0 + \Sigma' + a_{n-1}^*.$$

Таким образом,

$$a_0^* + \Sigma' + a_{n-1} = \Sigma,$$

$$a_0 + \Sigma' + a_{n-1}^* = \Sigma,$$

и потому

$$a_0^* = \bar{a}_{n-1}, \quad a_{n-1} = \bar{a}_0.$$

Таким образом,

нижний горизонтальный ряд окаймленного квадрата K полностью определяется его верхним рядом (2) и имеет вид

$$\bar{a}_{n-1}, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{n-2}, \bar{a}_0.$$

Пусть теперь

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0, \\ b_1, \\ \vdots \\ b_{n-2}, \\ b_{n-1} &= \bar{a}_{n-1} \end{aligned} \quad (3)$$

— левый вертикальный ряд квадрата K . Как и выше, мы немедленно получаем, что

правый вертикальный ряд квадрата K полностью определяется его левым рядом (3) и имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{b}_{n-1} &= a_{n-1}, \\ \bar{b}_1, \\ \vdots \\ \bar{b}_{n-2}, \\ \bar{b}_1 &= \bar{a}_0. \end{aligned}$$

Таким образом, квадрат K имеет вид

a_0	a_1	a_{n-2}	a_{n-1}
b_1	K'			\bar{b}_1
⋮				⋮
b_{n-2}				\bar{b}_{n-2}
\bar{a}_{n-1}				\bar{a}_1

и полностью определяется квадратом K' и $2n-2$ числами

$$\begin{matrix} a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, \\ b_1, \dots, b_{n-2}. \end{matrix} \quad (4)$$

При этом ясно, что,

для того чтобы числа (4) определяли окаймление обобщенного магического квадрата K' , необходимо и достаточно, чтобы

- 1) ни одно из них не участвовало в построении квадрата K' ;
- 2) никакие два из них не были взаимно дополнительны;
- 3) имели место равенства

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} &= \frac{n(n^2+1)}{2}, \\ b_1 + \dots + b_{n-2} &= a_{n-1} - a_0 + \frac{(n-2)(n^2+1)}{2}. \end{aligned}$$

Из условий 1) и 2) следует, что квадрат K состоит из различных чисел, а из условия 3) — что его «окаймляющие» ряды удовлетворяют условию магичности.

Как уже было указано выше, наша цель состоит в построении по данному магическому квадрату порядка $n-2$ некоторого магического квадрата порядка n . Это построение мы осуществляем в два этапа: сначала от данного магического квадрата порядка $n-2$ мы переходим к обобщенному магическому квадрату, а затем окаймляем этот квадрат до

магического квадрата порядка n . Для простоты мы не будем рассматривать любые обобщенные магические квадраты, а сосредоточим наше внимание лишь на введенных выше специальных магических квадратах. Конечно, мы при этом теряем ряд магических квадратов, но зато значительно выигрываем в стройности и общности.

Поскольку построение по данному магическому квадрату порядка $n-2$ специального магического квадрата не вызывает никаких трудностей (оно сводится к прибавлению ко всем числам данного квадрата одного и того же числа $2n-2$; см. выше), нам нужно только доказать возможность окаймления любого специального магического квадрата и показать, как это окаймление нужно производить на практике. Мы рассмотрим этот вопрос в следующем пункте.

2. Построение окаймлений

Из способа составления специальных магических квадратов вытекает, что в каждом из этих квадратов не участвуют числа

$$\begin{array}{ll}
 1, & \bar{1} = n^2, \\
 2, & \bar{2} = n^2 - 1, \\
 3, & \bar{3} = n^2 - 2, \\
 \dots & \dots \\
 2n-2, & \bar{2n-2} = n^2 - 2n + 3.
 \end{array} \quad (1)$$

Отсюда и из сказанного в предыдущем пункте следует, что для построения окаймления некоторого специального магического квадрата порядка $n-2$ нужно из числа (1) выбрать $2n-2$ попарно не взаимно дополнительных чисел

$$\begin{array}{l}
 a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, \\
 b_1, \dots, b_{n-2},
 \end{array} \quad (2)$$

так чтобы имели место равенства

$$a_0 + a_1 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} = \Sigma, \quad (3)$$

$$b_1 + \dots + b_{n-2} = a_{n-1} - a_0 + \Sigma', \quad (4)$$

где $\Sigma = \frac{n(n^2+1)}{2}$, $\Sigma' = \frac{(n-2)(n^2+1)}{2}$. Таким образом, «окаймляющие числа» (2) не зависят от выбора специального магического квадрата, т. е. пригодны для окаймления любого такого квадрата.

Мы не будем искать общего решения уравнений (3) и (4), а найдем только некоторые их «частные» решения. Пользуясь аналогичными соображениями, читатель сам легко найдет много других решений.

Пусть сначала число n нечетно: $n = 2m + 1$. В этом случае

$$\begin{aligned} n^2 &= 4m^2 + 4m + 1, \\ \Sigma &= 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1, \\ \Sigma' &= 4m^3 + 2m^2 - 1 \end{aligned}$$

и числа (1) имеют вид

$$\begin{array}{ll} 1, & 4m^2 + 4m + 1, \\ 2, & 4m^2 + 4m, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ m, & 4m^2 + 3m + 2, \\ m + 1, & 4m^2 + 3m + 1, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ 2m + 2, & 4m^2 + 2m, \\ 2m + 3, & 4m^2 + 2m - 1, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ 3m + 1, & 4m^2 + m + 1, \\ 4m, & 4m^2 + 2. \end{array} \quad (5)$$

Руководствуясь тем, что выражение для Σ можно представить в виде

$$\Sigma = m(4m^2 + 2m + 1) + 4m^2 + 3m + 1,$$

мы выберем m пар чисел (5) так, чтобы числа каждой пары не принадлежали одному и тому же столбцу и в сумме давали число $4m^2 + 2m + 1$. Этот выбор можно осуществить, например, следующим образом:

$$\begin{array}{ll} 1, & 4m^2 + 2m = \overline{2m + 2}, \\ 2, & 4m^2 + 2m - 1 = \overline{2m + 3}, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ m, & 4m^2 + m + 1 = \overline{3m + 1}. \end{array}$$

Добавляя к этим $2m$ числам число

$$4m^2 + 3m + 1 = \overline{m + 1},$$

мы видим, что сумма всех выбранных $2m + 1$ чисел равна Σ . Поэтому эти числа можно (в произвольном порядке) принять за числа $a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}$.

Выбрав указанным образом числа a_0, \dots, a_{n-1} , мы должны числа b_1, \dots, b_{n-2} выбрать среди чисел

$$\begin{array}{ll}
 m+2, & 4m^2+3m, \\
 m+3, & 4m^2+3m-1, \\
 \dots\dots & \dots\dots\dots \\
 2m-1, & 4m^2+2m+1, \\
 2m, & 4m^2+2m+2, \\
 2m+1, & 4m^2+2m+1, \\
 3m+2, & 4m^2+m, \\
 3m+3, & 4m^2+m-1, \\
 \dots\dots & \dots\dots\dots \\
 4m-1, & 4m^2+1, \\
 4m, & 4m^2+2.
 \end{array}$$

Мы примем за b_1, \dots, b_{n-2} числа

$$\begin{array}{lll}
 m+2, & 4m^2+m & = \overline{3m+2}, \\
 m+3, & 4m^2+m-1 & = \overline{3m+3}, \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
 2m-1, & 4m^2+1 & = \overline{4m-1}, \\
 2m, & 4m^2+2 & = \overline{4m}
 \end{array}$$

и число

$$4m^2+2m+1 = \overline{2m+1}.$$

Тогда сумма $b_1 + \dots + b_{n-2}$ будет равна

$$(m-1)(4m^2+2m+2) + 4m^2+2m+1 = 4m^3 + 2m^2 + 2m - 1.$$

Следовательно, чтобы выполнялось равенство (4), должно иметь место соотношение

$$a_{n-1} - a_0 = 2m,$$

которое, как легко видеть, удовлетворяется только при

$$a_{n-1} = 4m^2 + 3m + 1, \quad a_0 = 4m^2 + m + 1,$$

т. е. при

$$a_0 = \overline{3m+1}, \quad a_{n-1} = \overline{m+1}.$$

Таким образом, мы получаем следующее окаймление (имеется в виду, что «неугловые» числа могут быть расположены в произвольном порядке, лишь бы распо-

женные друг против друга числа были взаимно дополнительными):

$\overline{3m+1}$	1	2	...	m	$\overline{2m+2}$	$\overline{2m+3}$...	$\overline{3m}$	$\overline{3m+1}$
$\overline{m+2}$									$\overline{m+2}$
$\overline{m+3}$									$\overline{m+3}$
\vdots									\vdots
$\overline{2m}$									$\overline{2m}$
$\overline{2m+1}$									$\overline{2m+1}$
$\overline{3m+2}$									$\overline{3m+2}$
$\overline{3m+3}$									$\overline{3m+3}$
\vdots									\vdots
$\overline{4m}$									$\overline{4m}$
$\overline{m+1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$...	\overline{m}	$\overline{2m+2}$	$\overline{2m+3}$...	$\overline{3m}$	$\overline{3m+1}$

$$n = 2m + 1$$

Рассмотрим теперь случай n четного: $n = 2m$. В этом случае $n^2 + 1 = 4m^2 + 1$, $\Sigma = 4m^2 + m$, $\Sigma' = 4m^2 - 4m^2 + m - 1$, и числа (1) имеют вид

$$\begin{array}{ll}
 1, & 4m^2, \\
 2, & 4m^2 - 1, \\
 3, & 4m^2 - 2, \\
 4, & 4m^2 - 3, \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
 2m-3, & 4m^2 - 2m + 4, \\
 2m-2, & 4m^2 - 2m + 3, \\
 2m-1, & 4m^2 - 2m + 2, \\
 2m, & 4m^2 - 2m + 1, \\
 2m+1, & 4m^2 - 2m, \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
 4m-2, & 4m^2 - 4m + 3.
 \end{array} \tag{6}$$

В (6) каждая «четверка»

$$\begin{array}{ll} 4k-3, & 4m^2-4k+4, \\ 4k-2, & 4m^2-4k+3, \\ 4k-1, & 4m^2-4k+2, \\ 4k, & 4m^2-4k+1, \end{array}$$

$$k = 1, 2, \dots,$$

обладает тем свойством, что

$$4k-3 + \overline{4k-2} + \overline{4k-1} + 4k = 8m^2 + 2.$$

Поэтому при m четном мы можем за числа $a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}$ принять (взятые в произвольном порядке) числа

$$1, \quad \overline{2} = 4m^2 - 1, \quad \overline{3} = 4m^2 - 2, \quad 4,$$

.....

$2m-3, \overline{2m-2} = 4m^2 - 2m + 3, \overline{2m-1} = 4m^2 - 2m + 2, 2m,$
 ибо сумма этих чисел равна

$$(8m^2 + 2) \frac{m}{2} = \Sigma.$$

Выбрав указанным образом числа a_0, \dots, a_{n-1} , мы должны числа b_1, \dots, b_{n-2} выбрать среди чисел

$$\begin{array}{ll} 2m+1, & 4m^2-2m, \\ \dots\dots & \dots\dots \\ 4m-2, & 4m^2-4m+3. \end{array}$$

Мы примем за b_1, \dots, b_{n-2} числа

$$\begin{array}{ll} 2m+1, & 4m^2-2m-1 = \overline{2m+2}, \\ 2m+3, & 4m^2-2m-3 = \overline{2m+4}, \\ \dots\dots & \dots\dots \\ 4m-3, & 4m^2-4m+3 = \overline{4m-2}, \end{array}$$

сумма которых равна

$$4m^2(m-1) = 4m^3 - 4m^2.$$

Следовательно, чтобы выполнялось равенство (4), должно иметь место соотношение

$$a_0 - a_{n-1} = m - 1,$$

которое выполняется, например, при

$$\begin{array}{lll} a_0 = m, & a_{n-1} = 1, & \text{если } m \equiv 0 \pmod{4}, \\ a_0 = m + 3, & a_{n-1} = 4, & \text{если } m \equiv 2 \pmod{4}. \end{array}$$

Получающиеся таким образом окаймления изображены на рис. 15 и 16. (Как и выше, здесь имеется в виду, что «неугловые» числа могут быть расположены в произвольном порядке, лишь бы расположенные друг против друга числа были взаимно дополнительные.)

m	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	\dots	$\overline{m-3}$	$\overline{m-2}$	$\overline{m-1}$	$\overline{m+1}$	\dots	$\overline{2m-3}$	$\overline{2m-2}$	$\overline{2m-1}$	$\overline{2m}$	$\overline{1}$
$\overline{2m+1}$															$\overline{2m+1}$
$\overline{2m+3}$															$\overline{2m+3}$
\vdots															\vdots
\vdots															\vdots
$\overline{4m-3}$															$\overline{4m-3}$
$\overline{2m+2}$															$\overline{2m+2}$
$\overline{2m+4}$															$\overline{2m+4}$
\vdots															\vdots
\vdots															\vdots
$\overline{4m-2}$															$\overline{4m-2}$
$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	\dots	$\overline{m-3}$	$\overline{m-2}$	$\overline{m-1}$	$\overline{m+1}$	\dots	$\overline{2m-3}$	$\overline{2m-2}$	$\overline{2m-1}$	$\overline{2m}$	\overline{m}

$$a = 2m, m \equiv 0 \pmod{4}$$

Рис. 15.

Таким образом, нам осталось рассмотреть лишь случай m нечетного.

Так как для чисел (6) при любом $k = 1, 2, \dots, 4m-3$ выполняется соотношение

$$k + \overline{k+1} = 4m^2,$$

то сумма $n = 2m$ чисел

$$\begin{array}{rcl}
 1, & 4m^2 - 1 = \overline{2}, & \\
 3, & 4m^2 - 3 = \overline{4}, & \\
 & \dots & \\
 2m - 3, & 4m^2 - 2m + 3 = \overline{2m - 2}, & \\
 2m - 1, & 4m^2 - 2m + 1 = \overline{2m} &
 \end{array}$$

равна $4m^2 \cdot m = 4m^3$. Чтобы получить нужную нам сумму

$m+3$	1	$\overline{2}$	$\overline{3}$	5	...	$m+2$	$\overline{m+4}$	$\overline{m+5}$	$m+6$...	$2m-3$	$\overline{2m-2}$	$\overline{2m-1}$	$2m$	4
$2m+1$															$\overline{2m+1}$
$2m+3$															$\overline{2m+3}$
⋮															⋮
⋮															⋮
⋮															⋮
$4m-3$															$\overline{4m-3}$
$\overline{2m+2}$															$2m+2$
$\overline{2m+4}$															$2m+4$
⋮															⋮
⋮															⋮
⋮															⋮
$\overline{4m-2}$															$\overline{4m-2}$
$\overline{4}$	$\overline{1}$	2	3	$\overline{5}$...	$\overline{m+2}$	$m+4$	$m+5$	$\overline{m+6}$...	$\overline{2m-3}$	$\overline{2m-2}$	$\overline{2m-1}$	$\overline{2m}$	$\overline{m+3}$

$$n = 2m, \quad m \equiv 2 \pmod{4}$$

Рис. 16.

$\Sigma = 4m^3 + m$, мы увеличим одно из этих чисел, скажем, число $2m - 1$ на m . Таким образом, за числа $a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_n$

мы можем принять числа

$$\begin{array}{ll} 1, & 4m^2 - 1 = \overline{2}, \\ 3, & 4m^2 - 3 = \overline{4}, \\ \dots & \dots \\ 2m - 3, & 4m^2 - 2m + 3 = \overline{2m - 2}, \\ 3m - 1, & 4m^2 - 2m + 1 = \overline{2m}. \end{array}$$

Тогда числа b_1, \dots, b_{n-2} мы должны выбрать среди чисел

$$\begin{array}{ll} 2m - 1, & 4m^2 - 2m + 2, \\ 2m + 1, & 4m^2 - 2m, \\ 2m + 2, & 4m^2 - 2m - 1, \\ \dots & \dots \\ 3m - 2, & 4m^2 - 3m + 3, \\ 3m, & 4m^2 - 3m + 1, \\ 3m + 1, & 4m^2 - 3m, \\ \dots & \dots \\ 4m - 2, & 4m^2 - 4m + 3. \end{array}$$

Мы выберем числа

$$\begin{array}{lll} 2m - 1, & 2m + 1, & 4m^2 - 2m - 1 = \overline{2m + 2}, \\ 2m + 3, & 4m^2 - 2m - 3 = \overline{2m + 4}, \\ \dots & \dots & \dots \\ 3m - 4, & 4m^2 - 3m + 4 = \overline{3m - 3}, \\ & 4m^2 - 3m + 3 = \overline{3m - 2}, \\ & 3m, & 4m^2 - 3m = \overline{3m + 1}, \\ 3m + 2, & 4m^2 - 3m - 2 = \overline{3m + 3}, \\ \dots & \dots & \dots \\ 4m - 3, & 4m^2 - 4m + 3 = \overline{4m - 2}. \end{array}$$

Так как сумма $b_1 + \dots + b_{n-2}$ этих чисел равна

$$2m - 1 + 4m^2 - 3m + 3 + 4m^2(m - 2) = 4m^3 - 4m^2 - m + 2,$$

то, для того чтобы выполнялось равенство (4), должно иметь место соотношение $a_0 - a_{n-1} = 2m - 3$, которое выполняется лишь при

$$a_0 = 3m - 1, \quad a_{n-1} = m + 2.$$

Таким образом, мы получаем следующее окаймление (здесь опять имеется в виду, что «неугловые» числа

могут быть расположены в произвольном порядке, лишь бы расположенные друг против друга числа были взаимно дополнительными):

$\overline{3m-1}$	1	3	·	·	·	$\overline{m+1}$	$\overline{m+3}$	·	·	·	$\overline{2m-3}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	·	·	$\overline{2m}$	$\overline{m+2}$
$\overline{2m-1}$																	$\overline{2m-1}$
$\overline{2m+1}$																	$\overline{2m+1}$
$\overline{2m+3}$																	$\overline{2m+3}$
⋮																	⋮
$\overline{3m-4}$																	$\overline{3m-4}$
$\overline{2m+2}$																	$\overline{2m+2}$
$\overline{2m+4}$																	$\overline{2m+4}$
⋮																	⋮
$\overline{3m-3}$																	$\overline{3m-3}$
$\overline{3m-2}$																	$\overline{3m-2}$
$\overline{3m}$																	$\overline{3m}$
$\overline{3m+2}$																	$\overline{3m+2}$
⋮																	⋮
$\overline{4m-3}$																	$\overline{4m-3}$
$\overline{3m+1}$																	$\overline{3m+1}$
$\overline{3m+3}$																	$\overline{3m+3}$
⋮																	⋮
$\overline{4m-2}$																	$\overline{4m-2}$
$\overline{m+2}$	$\overline{7}$	$\overline{3}$	·	·	·	$\overline{m+1}$	$\overline{m+3}$	·	·	·	$\overline{2m-3}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	·	·	$\overline{2m}$	$\overline{3m-1}$

$$n=2m, m \equiv 1 \pmod{2}$$

Тем самым мы доказали, что *окаймления существуют для любого $n \geq 5$* . При этом за счет перестановок «неугловых» чисел мы можем получить по крайней мере $[(n-2)!]^2$ различных окаймлений (на самом деле различных окаймлений, конечно, значительно больше).

В заключение заметим, что для практического применения изложенного метода нет никакой необходимости запоминать построенные выше окаймления. В каждом конкретном случае окаймления лучше всего подбирать заново, руководствуясь только общим духом изложенных построений.

Цена 10 коп.